

Anwendung sequentieller Testverfahren auf betriebliche Daten

Von der Universität Oldenburg
zur Erlangung des Grades eines

**Doktors der
Wirtschafts- und Sozialwissenschaften
(Dr. rer. pol.)**

genehmigte Dissertation
von

Peer Andreas Kröh

1907

geboren am 19.03.1955 in Sanderbusch

Anwendung sequentieller Testverfahren
auf betriebliche Daten

Von der Universität Oldenburg
zur Erlangung des Grades eines

Doktors der Wirtschafts- und Sozialwissenschaften
(Dr. rer. pol.)

genehmigte Dissertation

von

Peer Andreas Kröh

geboren am 19.03.1955 in Sanderbusch

Referent: Prof. Dr. Klaus W. Schüler

Korreferent: Prof. Dr. Gerold Behrens

Tag der Disputation: 19.06.1987

Vorwort

In dieser Arbeit soll gezeigt werden, wie sich mit Hilfe sequentieller Testverfahren betriebswirtschaftliche Daten analysieren lassen. So werden u.a. Testverfahren zur Bestimmung von Trends beliebiger Ordnung sowie zur Erkennung von saisonalen Mustern vorgestellt und diskutiert.

Ein Schwerpunkt dieser Arbeit besteht in der Herleitung und Anwendung spezieller Testverfahren zur Identifikation von ARIMA-Prozessen. Diese Vorgehensweise wird in Kapitel 4 unter Verwendung der Verkaufszahlen der Mensa der Universität Oldenburg exemplarisch angewendet; darüberhinaus werden mit Hilfe dieser ARIMA-Modelle sowie anderer Verfahren Prognosen erstellt und es erfolgt eine vergleichende Betrachtung der Ergebnisse.

Um eine solche Gegenüberstellung zu ermöglichen, werden zunächst in Kapitel 1 einige in der Ökonomie gängige Prognosetechniken skizziert. Hierbei wird insbesondere auf die Gefahren hingewiesen, die bei der Anwendung dieser Methoden entstehen können.

Da im Vordergrund der Betrachtungen die ARIMA-Modelle stehen, werden diese in Kapitel 2 dargestellt. Besonders ausführlich werden in diesem Zusammenhang verschiedene bekannte Verfahren der Modellbestimmung behandelt und die mit diesen Techniken verbundenen Probleme aufgezeigt.

In Kapitel 3 wird zunächst die Sequenzanalyse beschrieben. Daran anschließend werden sequentielle Testverfahren hergeleitet bzw. modifiziert, mit deren Hilfe sämtliche Modellparameter eines univariaten u.U. multiplikativen $ARIMA(p,d,q) \times (P,D,Q)_g$ -Prozesses statistisch abgesichert bestimmt werden können. Darüberhinaus werden sequentielle Tests zur Überprüfung der Zeitreihendaten auf Varianzhomogenität sowie sequentielle Adäquatheitstests entwickelt.

Die in dieser Arbeit dargestellten Testverfahren wurden im Rahmen eines Computerprogrammes implementiert, so daß die Analyse sämtlicher in Kapitel 4 behandelter Zeitreihen vollautomatisch durchgeführt werden konnte.

Für die Unterstützung und Betreuung dieser Arbeit durch Herrn Prof. Dr. Klaus W. Schüler sowie Herrn Prof. Dr. Gerold Behrens möchte ich an dieser Stelle herzlich danken.

Inhaltsverzeichnis

Seite

1.	Prognosetechniken	1
1.1	Der Prognosebegriff	1
1.2	Klassifikation von Prognosen und ihrer Rahmenbedingungen	5
1.2.1	Abgrenzung von Markt- und Absatzprognosen .	5
1.2.2	Die Rahmenbedingungen für Prognosen	7
1.3	Einfache Prognosemodelle	11
1.4	Ökonometrische bzw. Marketing-Prognose- modelle	16
1.5	Zeitreihenanalytische Prognosemodelle	23
2.	Das Fitten von univariaten und multiplikativen ARIMA-Modellen	33
2.1	Modellidentifikation nach Box & Jenkins ...	34
2.1.1	Ermittlung des nichtsaisonalen Differen- zengrades d	35
2.1.2	Die Bestimmung saisonaler Schwankungen s sowie des saisonalen Differenzengrades D ..	37
2.1.3	Identifikation des nichtsaisonalen ARMA(p,q)-Modells	39
2.1.4	Identifikation des saisonalen ARMA(P,Q) _{s} - Modells	41
2.2	Neuere Ansätze der Modellidentifikation ...	42
2.3	Die Schätzung der Parameter eines ARMA- Modells	50
2.4	Modelldiagnostik	53

3.	Identifikation von univariaten und multiplika- tiven ARIMA-Modellen mit Hilfe sequentieller Testverfahren	55
3.1	Klassische und sequentielle Testverfahren .	55
3.2	Der "Sequential Probability Ratio Test" (SPRT)	58
3.3	Überprüfung auf Varianzhomogenität sowie Ermittlung der Modellparameter d und D	64
3.3.1	Gruppenweise Verarbeitung von Daten unter Verwendung des SPRT	65
3.3.2	Verteilungsfreie sequentielle Testverfahren	66
3.3.3	Überprüfung auf Varianzhomogenität an Hand der Rohdaten	69
3.3.4	Bestimmung der Differenzengrade d und D ...	71
3.4	Anwendung der Sequenzanalyse zur Bestim- mung von s	73
3.4.1	Die Anwendung der Sequenzanalyse bei Pro- blemen mit mehreren Alternativhypothesen ..	73
3.4.2	Die Bestimmung von Zyklen der Länge s	79
3.5	Identifikation der Modellparameter p und q sowie P und Q	82
3.6	Die Überprüfung des gefitteten ARIMA- Modells auf Adäquatheit	86
3.6.1	Überprüfung der Residuen auf Normalver- teilung	86
3.6.2	Darstellung eines sequentiellen Testver- fahrens für den Erwartungswert einer nor- malverteilten Zufallsvariablen	88

3.7	Güte und Modifikation des SPRT	90
3.7.1	Die Operationscharakteristik	90
3.7.2	Der durchschnittlich zu erwartende Stich- probenumfang	95
3.7.3	Der SPRT bei vorgegebener Maximalzahl von Beobachtungen	99
3.7.4	Der "Generalized Sequential Probability Ratio Test" (GSPRT)	102
4.	Empirische Untersuchung	106
4.1	Beschreibung des Datenmaterials	106
4.2	Datenanalyse unter Verwendung der ARIMA- Ansätze	117
4.2.1	Vollautomatische Bestimmung der ARIMA- Modelle	117
4.2.2	Prognose mit Hilfe von ARIMA-Modellen	128
4.3	Vorhersagen mit Hilfe von ARIMA-Modellen und andere Prognosetechniken im Vergleich .	150
4.4	Auswahlkriterien für Prognoseverfahren	164
5.	Zusammenfassung und Ausblick	169
Anhang:	Ablaufschema für das Programm "FITTING"	174
Literaturverzeichnis		187

Abbildungen

Seite

Abb. 1.1	Schema für Erklärungen und Prognosen nach Hempel & Oppenheim	2
Abb. 1.2	Zur Symmetrie von Erklärung und Prognose ..	3
Abb. 1.3	Grundschema der Zusammenhänge zwischen den Voraussetzungen und den Ergebnissen von Perspektiven, Prognosen und Utopien	4
Abb. 1.4	Unterteilung von Markt- und Absatzprognosen	6
Abb. 1.5	Zum Stabilitätsgrad einer Zeitreihe	8
Abb. 1.6	Schematische Darstellung von Wachstums- funktionen mit a) konkavem Verlauf ohne Sättigungswert und b) S-förmigem Verlauf mit Sättigungswert y^*	15
Abb. 1.7	Zusammenhang zwischen Daten, a priori- Informationen, Marketing-Verallgemeinerun- gen, Marketing-Theorien und Marketing- Modellen	21
Abb. 1.8	Die Komponenten des additiven Zeitreihen- modells	25
Abb. 1.9	Die Komponenten des multiplikativen Zeit- reihenmodells	26
Abb. 2.1	Schematische Darstellung der Box & Jenkins- Methode	34
Abb. 2.2	Grob-Schema zur Identifikation nach Box & Jenkins	40
Abb. 3.1	Schematische Darstellung von Annahme- und Indifferenzzonen bei Überprüfung der Hypo- thesen (3.4.14)	78
Abb. 3.2	Schematische Darstellung des Parameter- raumes P	92

Abb. 3.3	Operationscharakteristik für die Hypothesen (3.7.3)	93
Abb. 3.4	Schematische Darstellung der ASN-Kurve	96
Abb. 3.5	Schematische Darstellung des sequentiellen Testverfahrens von Baruah & Bhattacharjee .	105
Abb. 4.1	Darstellung der Rohdaten sowie der "normalisierten" Zeitreihenwerte für das Angebot Tellergericht	113
Abb. 4.2	Darstellung der Rohdaten sowie der "normalisierten" Zeitreihenwerte für das Angebot Menü	114
Abb. 4.3	Darstellung der Rohdaten sowie der "normalisierten" Zeitreihenwerte für das Angebot Alternativessen	115
Abb. 4.4	Darstellung der Rohdaten sowie der "normalisierten" Zeitreihenwerte für das Angebot Auswahlen	116
Abb. 4.5	Grenzen der Indifferenzzone bei Verwendung des GSPRT für $\alpha = \beta = 0.01$, $t_0 = 57$ und $T = 275$	118
Abb. 4.6	Darstellung der Zeitreihenwerte für das SS 85 sowie von 20 Prognosewerten mit den zugehörigen Konfidenzintervallen für die "normalisierten" Daten des Angebots Menü ..	140
Abb. 4.7	Darstellung der Zeitreihenwerte für das SS 85 sowie von 20 Prognosewerten mit den zugehörigen Konfidenzintervallen für die "normalisierten" Daten des Angebots Alternativessen	141
Abb. 4.8	Darstellung der Zeitreihenwerte für das SS 85 sowie von 20 Prognosewerten mit den zugehörigen Konfidenzintervallen für die "normalisierten" Daten des Angebots Auswahlen	142

- Abb. 4.9 Darstellung der Zeitreihenwerte für das SS 85 sowie von 20 Prognosewerten mit den zugehörigen Konfidenzintervallen für die Rohdaten des Angebots Menü 147
- Abb. 4.10 Darstellung der Zeitreihenwerte für das SS 85 sowie von 20 Prognosewerten mit den zugehörigen Konfidenzintervallen für die Rohdaten des Alternativessens 148
- Abb. 4.11 Darstellung der Zeitreihenwerte für das SS 85 sowie von 20 Prognosewerten mit den zugehörigen Konfidenzintervallen für die Rohdaten des Auswahlessens 149
- Abb. 4.12 $RMSE_F$'s für prognostizierte Rohdaten des Angebots Menü
 a) mit der ARIMA-Technik (———)
 b) mit der exponentiellen Glättung (— — —)
 c) mit der Fortschreibung (— • —) .. 157
- Abb. 4.13 $RMSE_F$'s für prognostizierte Rohdaten des Alternativessens
 a) mit der ARIMA-Technik (———)
 b) mit der exponentiellen Glättung (— — —)
 c) mit der Fortschreibung (— • —) .. 158
- Abb. 4.14 $RMSE_F$'s für prognostizierte Rohdaten des Auswahlessens
 a) mit der ARIMA-Technik (———)
 b) mit der exponentiellen Glättung (— — —)
 c) mit der Fortschreibung (— • —) .. 159

Tabellen

Seite

Tab. 1.1	Stabilitätsgrad von Zeitreihen und ihr Prognosehorizont	9
Tab. 3.1	OC und ASN für die Hypothesen (3.3.11) mit $\alpha = \beta = 0.01$	98
Tab. 4.1	Anzahl der Beobachtungstage für den Zeit- raum WS 83/84 bis SS 85	108
Tab. 4.2	Prognostizierte Absatzzahlen für die Feiertage in der Vorlesungszeit	109
Tab. 4.3	Schätzergebnisse für das Angebot Menü	119
Tab. 4.4	Schätzergebnisse für das Alternativessen ..	120
Tab. 4.5	Schätzergebnisse für das Auswahlessen	120
Tab. 4.6	Testergebnisse für das Angebot Teller- gericht	123
Tab. 4.7	Testergebnisse für das Angebot Menü	124
Tab. 4.8	Testergebnisse für das Alternativessen	125
Tab. 4.9	Testergebnisse für das Auswahlessen	126
Tab. 4.10	Prognosen für die "normalisierten" Daten des Angebots Menü	136
Tab. 4.11	Prognosen für die "normalisierten" Daten des Angebots Alternativessen	137
Tab. 4.12	Prognosen für die "normalisierten" Daten des Angebots Auswahlessen	138
Tab. 4.13	Prognosewerte und Konfidenzintervalle für die Rohdaten des Angebots Menü	144
Tab. 4.14	Prognosewerte und Konfidenzintervalle für die Rohdaten des Angebots Alternativessen .	145
Tab. 4.15	Prognosewerte und Konfidenzintervalle für die Rohdaten des Angebots Auswahlessen	146

Tab. 4.16	Rohdaten und Prognosewerte für das Angebot Menü unter Anwendung verschiedener Prognosetechniken	153
Tab. 4.17	Rohdaten und Prognosewerte für das Alternativessen unter Anwendung verschiedener Prognosetechniken	154
Tab. 4.18	Rohdaten und Prognosewerte für das Auswahlessen unter Anwendung verschiedener Prognosetechniken	155

1. Prognosetechniken

In diesem Kapitel erfolgt zuerst eine Klärung des Prognosebegriffs. Daran anschließend werden die Prognosen klassifiziert sowie ihre Rahmenbedingungen betrachtet. Danach erfolgt eine Skizzierung der einfachen Prognosemodelle sowie eine ausführlichere Darstellung der ökonometrischen bzw. Marketing-Prognosemodelle und der zeitreihenanalytischen Vorhersagetechniken.

1.1 Der Prognosebegriff

Im vorliegenden Abschnitt soll zunächst auf die wissenschaftstheoretische Bedeutung von Prognosen eingegangen werden. In diesem Zusammenhang ist zuerst anzumerken, daß Prognosen und Erklärungen eng miteinander verbunden sind, denn wenn ein beobachtetes Verhalten erklärt werden kann, so kann es i.a. auch prognostiziert werden. Dies gilt jedoch nur für Erklärungen und nicht für Beschreibungen, denn während eine Beschreibung lediglich eine Abbildung der wahrnehmbaren Umwelt ist, versucht die wissenschaftliche Erklärung die Frage nach dem Warum zu beantworten (s.a. Kroeber-Riel, 1975, S. 26).

Sowohl Erklärung als auch Prognose beruhen auf demselben logischen Schema, bei dem das Auftreten eines zu erklärenden bzw. zu prognostizierenden Einzelfalls aus einer allgemeingültigen Gesetzmäßigkeit hergeleitet wird. Hempel & Oppenheim (1965) haben das in Abbildung 1.1 wiedergegebene Schema für Erklärung und Prognose entworfen, in dem die sogenannten Antecedensbedingungen die genau zu formulierenden Bedingungen darstellen, die eine Anwendung der allgemeingültigen Gesetzmäßigkeit auf den Einzelfall erlauben.

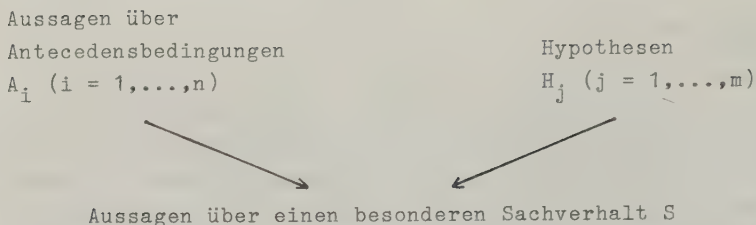


Abb. 1.1: Schema für Erklärungen und Prognosen nach Hempel & Oppenheim

Wird eine Aussage über einen besonderen Sachverhalt S getroffen, so ist zu beachten, ob die Hypothese ein deterministischer Allsatz ist oder ob von einer statistischen Hypothese ausgegangen werden muß. Deterministische Allsätze, die abgesicherte deduktive Schlüsse gestatten, sind in erster Linie in den Naturwissenschaften denkbar, da hier einer Aussage beispielsweise ein physikalisches Naturgesetz zugrundegelegt werden kann. Können in einem Erklärungsschema deterministische Hypothesen verwendet werden, so spricht man von einem deduktiven Erklärungsschema. Im Gegensatz hierzu steht das induktive Erklärungsschema, das lediglich statistische Aussagen gestattet. Da man es in den Wirtschafts- und Sozialwissenschaften sowie anderen gesellschaftswissenschaftlichen Bereichen fast ausschließlich mit Hypothesen über menschliches Verhalten zu tun hat, können hier im Gegensatz zu den Naturwissenschaften praktisch nur statistische Hypothesen zur Anwendung gelangen. Eine ausführlichere Darstellung der Beziehungen zwischen Erklärungen und Prognosen bezogen auf die Wirtschafts- und Sozialwissenschaften gibt u.a. Opp (1970).

Soll eine Erklärung als Prognose von einem Zeitpunkt t ohne Zuhilfenahme weiterer Gesetze auf einen Zeitpunkt t^* übertragen werden, so ist darauf zu achten, daß die der Prognose zugrundegelegten Randbedingungen nicht nur gegeben sein müssen, sondern es muß ebenfalls die Konstanz dieser Randbedingungen über den gesamten Prognosezeitraum hinweg sichergestellt sein. Insbesondere bei komplexen Prognosen mit vielen Randbedingungen ist es jedoch unrealistisch anzunehmen, daß sämtliche in Betracht ge-

zogene Einflußfaktoren vor allem über einen größeren Zeitraum hinweg konstant sind, so daß es leicht zu Verzerrungen kommen kann. Friedrichs (1977, S. 46) weist darüberhinaus auf die Eigen-
 dynamik von Prognosen hin, denn erst die Kenntnis einer Vorher-
 sage kann beispielsweise zu Veränderungen des Verhaltens von Per-
 sonen führen. Dieses Phänomen wird auch als "Selbsterfüllung" be-
 zeichnet. So kann beispielsweise ein Sinken der Baukonjunktur
 erst durch die Veröffentlichung einer entsprechenden Prognose
 verursacht werden. Umgekehrt kann eine Prognose jedoch auch eine
 "heilende Wirkung" haben (vgl. Streeten, 1967, S. 65ff). "Unter
 diesem Aspekt sind viele Konjunkturprognosen in Zeiten herrschen-
 der Rezession zu beurteilen, insbesondere, wenn sie von Politi-
 kern abgegeben werden. In solchen Fällen entbehrt die Prognose
 meistens einer objektiv-wissenschaftlichen Grundlage und ist eher
 als konjunkturpolitisches Steuerungsinstrument auf psychologi-
 scher Basis anzusehen." (Rosentreter, 1977, S. 648)

Im Gegensatz zur Prognose, bei der die Randbedingungen und die Hy-
 pothesen gegeben sein müssen, werden bei einer Erklärung diese
 Größen gesucht und es ist das beobachtete Verhalten gegeben. So-
 mit besteht zwischen Erklärungen und Prognosen eine Symmetrie,
 wie sie in Abbildung 1.2 dargestellt ist.

	Erklärung des Verhaltens	Prognose
gegeben	beobachtetes Verhalten	Rahmenbedingungen und Hypothesen
gesucht	Rahmenbedingungen und Hypothesen	das Verhalten

Abb. 1.2: Zur Symmetrie von Erklärung und Prognose

Aussagen über die Zukunft geschehen jedoch nicht ausschließlich
 mit Hilfe von Prognosen, sondern ebenfalls mit Perspektiven und
 Utopien. Allen drei Begriffen ist gemein, daß sie sowohl auto-
 nome als auch beeinflussbare Bestimmungsfaktoren berücksichti-
 gen. Autonome Einflußgrößen, wie z.B. das Wetter, können weder
 vom Staat noch vom Individuum unmittelbar beeinflusst werden,
 während beeinflussbare Bestimmungsfaktoren, wie z.B. Gesetze
 oder Werbemaßnahmen einer Unternehmung kontrollierbar sind.

Die Perspektive setzt sich auf Grund bestimmter Annahmen über autonome und beeinflussbare Bestimmungsfaktoren mit denkbaren zukünftigen Entwicklungen auseinander; hierbei wird jedoch keine Bewertung dieser Möglichkeiten vorgenommen. Die Prognose kann als Weiterführung der Perspektive angesehen werden, da sie sich auf die Voraussage einer bestimmten zukünftigen Entwicklung beschränkt. So versucht die Prognose, "exakte" Aussagen über die Zukunft zu machen, indem sie ein objektives und absolutes Zukunftsbild zeichnet (vgl. Gisholt, 1976, S. 42). Werden hingegen in Anlehnung an rational überlegte Perspektiven Aussagen darüber getroffen, wie die Zukunft sein sollte, so spricht man von einer Utopie; häufig haben hierbei ideologische Zielvorstellungen einen gravierenden Einfluß (s.a. Flechtheim, 1970).

Die folgende Abbildung 1.3 ist eine schematische Wiedergabe der Beziehungen zwischen den Bestimmungsfaktoren, Perspektiven, Prognosen und Utopien.

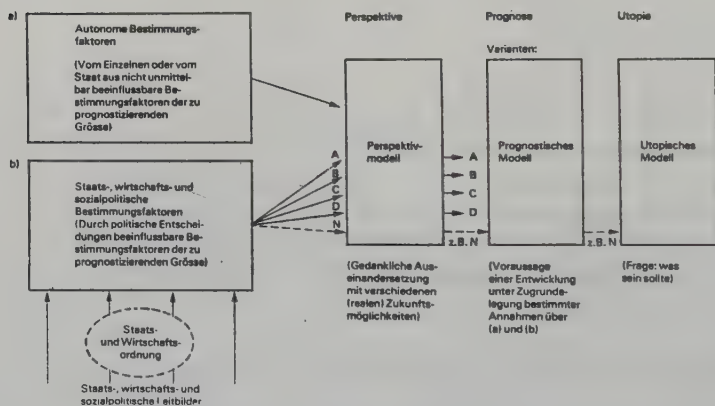


Abb. 1.3: Grundschema der Zusammenhänge zwischen den Voraussetzungen und den Ergebnissen von Perspektiven, Prognosen und Utopien (aus: Gisholt, 1976, S. 43)

1.2 Klassifikation von Prognosen und ihrer Rahmenbedingungen

Einen Hinweis auf wichtige Einsatzgebiete für Prognosen gibt Wöller (1980, S. 111f). Da im weiteren Verlauf dieser Arbeit jedoch ausschließlich zeitbezogene Absatzprognosen näher betrachtet werden sollen, werden diese zunächst den Marktprognosen gegenübergestellt.

1.2.1 Abgrenzung von Markt- und Absatzprognosen

Betrachtet man zeitbezogene Markt- und Absatzprognosen, so läßt sich ihr Inhalt präziser fassen als "vor allem der zukünftige Zustand bzw. die Entwicklung von Markt- und Absatzpotential, Markt- und Absatzvolumen sowie des Marktanteils einer Unternehmung." (Meffert, 1980, S. 186)

Rosentreter (1977, S. 573) weist darauf hin, daß die Marktprognose umfassender ist als die Absatzprognose. Denn unter Verwendung der Marktprognose werden die Absatzchancen aller Unternehmen, die ein in bezug auf seine Verwendung substituierbares Gut auf einem bestimmten Markt, d.h. in einer festgelegten Region, anbieten, simultan betrachtet; hingegen spricht man von einer Absatzprognose, wenn sich die Vorhersage ausschließlich auf ein bestimmtes Produkt, das von einem Unternehmen angeboten wird, bezieht.

Sowohl Markt- als auch Absatzprognosen lassen sich weiter unterteilen, wie dies in Abbildung 1.4 skizziert ist.

Wie aus Abbildung 1.4 ersichtlich ist, muß bei Absatzprognosen zwischen Wirkungs- und Entwicklungsprognosen unterschieden werden. Der vorherzusagende Absatz hängt bei Entwicklungsprognosen von Einflußgrößen wie z.B. dem Wetter oder absatzpolitischen Maßnahmen der Konkurrenz ab, die das betrachtete Unternehmen nicht beeinflussen kann. Unterliegen die in die Vorhersage eingehenden Variablen hingegen ausschließlich der direkten Kontrolle der Unternehmung - dies ist z.B. bei sämtlichen Marketinginstrumenten der Fall - so spricht man von einer Wirkungsprognose.

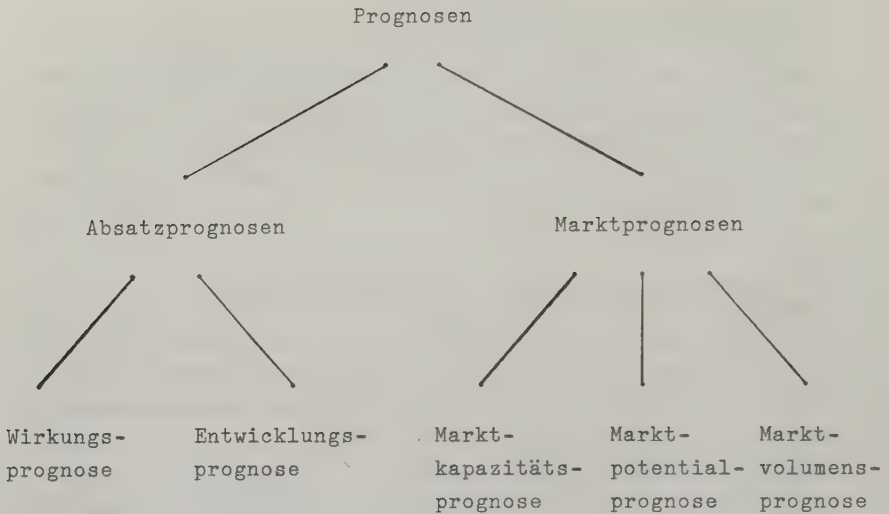


Abb. 1.4: Unterteilung von Markt- und Absatzprognosen

Wird eine Prognose ökonomischer Größen vorgenommen, so ist zu beachten, ob man Produkte mit sehr geringer Lebensdauer, d.h. insbesondere Verbrauchsgüter, oder längerlebige Güter betrachtet. So erweist sich die Vorhersage für Gebrauchsgüter i.a. als aufwendiger, da sich hier die tatsächliche Nachfrage aus Neu- und Ersatzbedarf zusammensetzt.

Somit kommt der Bestimmung des Ersatzbedarfs eine große Bedeutung zu, wobei der Produktlebenszyklus, der i.a. mit den Phasen Einführung, Wachstum, Reifezeit, Sättigung und Degeneration definiert wird (s.a. Kilger, 1973), eine wesentliche Rolle spielt. Die Prognose dieser Größen ist mit erheblichen Schwierigkeiten verbunden, da zwischen dem Zeitpunkt des Lebensendes eines Produktes und dem Ersatzzeitpunkt eine erhebliche Diskrepanz bestehen kann. "Besonders auf dem Sektor der privaten Nachfrage sind nicht immer technische oder rentabilitätsmäßige Gesichtspunkte entscheidend, wenn es darum geht, ein veraltetes Produkt zu ersetzen. Neben finanziellen Überlegungen bestimmen auch soziologische und psychologische Faktoren die Entscheidung bezüglich des Ersatzzeitpunktes." (Rosentreter, 1977, S. 577f)

So hat sich beispielsweise Bass (1974) mit der Prognose von Gebrauchsgütern befaßt und im Rahmen seiner Veröffentlichung eine langfristige Absatzprognose für Farbfernsehgeräte erstellt.

Soll eine Vorhersage durchgeführt werden, so müssen - unabhängig von dem gewählten Prognoseverfahren - a priori die der Prognose zugrundezulegenden Rahmenbedingungen festgelegt werden. Hierauf soll im folgenden Abschnitt eingegangen werden.

1.2.2 Die Rahmenbedingungen für Prognosen

Bei jeder Prognose ist zunächst der Prognosehorizont, d.h. der Zeitraum, auf den sich die Prognose bezieht, vorzugeben. Man kann zwischen kurz-, mittel- und langfristigen Prognosen unterscheiden. Eine kurzfristige Prognose umfaßt einen Zeitraum bis zu einem Jahr, während Voraussagen für ein bis zu vier Jahren als mittelfristig und Prognosen für einen Zeitraum von über vier bis zu 10 Jahren als langfristig bezeichnet werden. Voraussagen, die über 10 Jahre hinausgehen, werden i.a. der Futurologie zugeordnet.

Wöller (1980, S. 39) weist darauf hin, daß in Abhängigkeit von dem Vorhersagezeitraum der Einfluß einiger Bestimmungsfaktoren dominieren kann. So können beispielsweise bei kurzfristigen Absatzprognosen Saisonschwankungen, bei mittelfristigen Absatzprognosen die Entwicklung des Sozialproduktes und bei langfristigen Absatzprognosen die Rohstoffversorgung eine besondere Bedeutung erlangen.

Eine genauere Abgrenzung von kurzfristigen Prognosen gibt Lewandowski (1974, S. 3ff), indem er den Prognosehorizont in Abhängigkeit vom Stabilitätsgrad τ bestimmt. Hierbei wird eine Zeitreihe im Vergleich mit einer anderen Zeitreihe als stabiler betrachtet, wenn sich ihre grundlegenden Charakteristika wie z.B. Trend und Mittelwert weniger häufig verändern, d.h. wenn sie eine geringere Anzahl von Strukturbrüchen aufweist. Abbildung 1.5 zeigt eine Zeitreihe, die in sechs Intervalle der jeweiligen Länge t_i eingeteilt ist, wobei nach jedem Intervall eine wesentliche Veränderung des der Zeitreihe zugrundeliegenden Trends stattfindet.

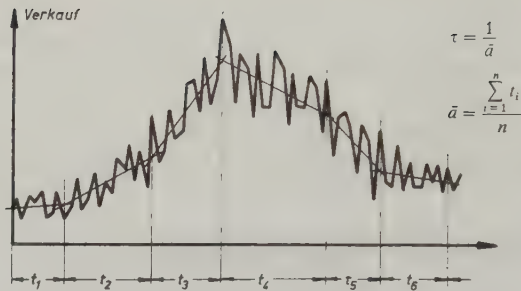


Abb. 1.5: Zum Stabilitätsgrad einer Zeitreihe
(aus: Lewandowski, 1974, S. 3)

Der Stabilitätsgrad ist nunmehr definiert als der Kehrwert des arithmetischen Mittels der n Zeitintervalle t_i , in die die Zeitreihe aufgeteilt wurde, d.h. es gilt:

$$(1.2.1) \quad \tau = \frac{1}{\bar{a}} \quad \text{mit} \quad \bar{a} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n t_i$$

In Tabelle 1.1 ist der Prognosehorizont für kurzfristige Prognosen in Abhängigkeit vom Stabilitätsgrad der zugrundeliegenden Zeitreihe wiedergegeben. Es ist einsichtig (s.a. Tabelle 1.1), daß der Prognosehorizont für eine kurzfristige Prognose um so größer wird, je stabiler die zugrundeliegende Zeitreihe ist.

Die Tabelle 1.1 gibt die Prognosehorizonte für verschiedene Stabilitätsgrade τ wieder. Dabei zeigt sich, daß man bei stark aggregierten Variablen mit einem hohen Stabilitätsgrad rechnen kann, während z.B. bei modeabhängigen Produkten, d.h. es ist $\tau > 0.5$, von Instabilität ausgegangen werden muß.

Die Bestimmung der einzelnen Intervalllängen t_i und des daraus resultierenden Stabilitätsgrades kann lediglich auf einer visuellen Betrachtung der Zeitreihendaten beruhen, da statistisch

Tab. 1.1: Stabilitätsgrad von Zeitreihen und ihr
Prognosehorizont

Stabilitätsgrad τ der Zeitreihe	Maximaler Prognosehorizont kurzfristiger Prognosen
Hohe Stabilität ($\tau \leq 0.1$) z.B. Zeitreihen aus der Makroökonomie; $\bar{a} \approx 12$ Monate	8 - 12 Monate
Gute Stabilität ($0.1 < \tau \leq 0.15$) z.B. Umsatzvolumen bestimmter indu- strieller Branchen; $\bar{a} \approx 8$ Monate	5 - 8 Monate
Mittlere Stabilität ($0.15 < \tau \leq 0.25$) z.B. Absatzzahlen überregionaler Massenprodukte; $\bar{a} \approx 5$ Monate	3 - 6 Monate
Niedrige Stabilität ($0.25 < \tau \leq 0.5$) z.B. regionaler Ab- satz von Produkten; $\bar{a} \approx 3$ Monate	2 - 4 Monate
Instabilität ($\tau > 0.5$) z.B. Absatzzahlen von modeabhängigen Produkten; $\bar{a} \approx 2$ Monate	1 - 3 Monate

abgesicherte Aussagen über strukturelle Veränderungen an Hand weniger Datenpunkte nicht möglich sind. Außerdem bezieht sich der dargestellte Stabilitätsgrad nur auf Trendänderungen und nicht auf generelle Strukturbrüche, wie z.B. eine Veränderung der Varianzen.

Da der Prognosehorizont sich i.a. vielmehr schon aus der Problemstellung und den damit betrachteten Variablen ergibt, kann man auf den Stabilitätsgrad als Kriterium für den Prognosehorizont verzichten.

Ist der Prognosehorizont festgelegt, so muß der Prognoseraum bestimmt werden. Absatzprognosen beziehen sich zumeist auf ein begrenztes Gebiet, wie z.B. einen nationalen Markt, die EG etc. Von der Größe des Prognoseraumes hängt i.a. ab, wieviele Geschäftspartner bzw. Kunden in die Vorhersage einbezogen werden. Eine Absatzprognose muß jedoch nicht notwendigerweise alle Kunden der betrachteten Region umfassen, sondern kann sich z.B. auch auf einen einzelnen Kunden beziehen.

Um ein geeignetes Prognoseverfahren entsprechend anwenden zu können, muß feststehen, ob eine Punkt- oder eine Intervallprognose durchgeführt werden soll, d.h. ob eine Vorhersage für einen Individualwert oder einen näher zu definierenden Bereich erfolgen soll. Rinne (1976, S. 95) merkt dazu an, daß sich Punktprognosen ohne Schwierigkeiten an mehreren Stellen t^* , $t^* + 1$, ... durchführen lassen, wohingegen dies für Intervallprognosen nicht gilt, da sich die Überdeckungswahrscheinlichkeit in diesem Fall i.a. verändert.

Ferner ist zwischen ex ante- und ex post-Prognosen zu unterscheiden. Wird mit Hilfe von T vorliegenden Daten ein Modell bestimmt, mit dessen Hilfe eine Vorhersage gemacht wird und wird hiermit ein Wert y_t prognostiziert, für den $t \leq T$ gilt, so liegt eine ex post-Prognose vor. Gilt hingegen $t > T$, so spricht man von einer ex ante-Prognose oder Prognose im engeren Sinne.

Neben den oben angegebenen Unterteilungen ist eine weitere Klassifizierung in bedingte bzw. unbedingte Prognosen von besonderer Bedeutung. Vielfach wird bei der Prognose einer ökonomischen Größe der Einfluß anderer Größen im Prognoseansatz berücksichtigt. Man setzt also die zu prognostizierende Variable in

Beziehung zu anderen Größen, die sich u.U. leicht vorhersagen lassen oder für die bereits Prognosen vorliegen. In diesem Fall spricht man von einer bedingten Prognose. Da in der Regel für die endogenen Variablen die zukünftigen Werte geschätzt werden müssen, stellt die bedingte Prognose einen zweistufigen Prozeß dar.

In vielen Fällen wird für eine Prognose unterstellt, daß sich die betrachtete Variable in der Zeit autonom entwickelt und nur von t als Einflußgröße abhängt. Im Gegensatz zur bedingten Prognose wird hierbei der Einfluß von exogenen Variablen vernachlässigt bzw. man geht davon aus, daß sich diese Einflüsse unter der Variablen "Zeit" subsummieren lassen. Grundlage einer unbedingten Prognose ist i.a. eine Zeitreihenanalyse der vergangenen Entwicklung, auf deren Basis dann die Prognose erstellt wird. Auf zeitreihenanalytische Ansätze für unbedingte Prognosen gehen wir in Abschnitt 1.5 ausführlich ein.

1.3 Einfache Prognosemodelle

Da die einfachen Prognosetechniken bereits umfassend in der einschlägigen Literatur abgehandelt worden sind, soll im folgenden lediglich ein Überblick über die wichtigsten Verfahren ohne ausführliche Darstellungen oder Herleitungen gegeben werden.

Bei der Festlegung einer der Problemstellung angemessenen Prognoseverfahrens ist zuerst zwischen qualitativen und quantitativen Techniken zu unterscheiden. Die qualitativen Verfahren basieren auf einer formfrei oder formgebunden ablaufenden Befragung von Mitarbeitern und/oder Verbrauchern, ohne daß hierbei mathematische Hilfsmittel angewendet werden. Bei qualitativen Prognosen werden Entwicklungstendenzen vorhergesagt, ohne daß numerische Angaben über die Entwicklung der betreffenden ökonomischen Größe gemacht werden. Eine qualitative Prognose liegt z.B. vor, wenn man vorhersagt, "der Zinssatz (bzw. das Zinsniveau) wird steigen" oder "der Zinssatz (das Zinsniveau) wird fallen". Für Entscheidungen über Baumaßnahmen oder andere Investitionsvorhaben, bei denen die Kapitalkosten, die vom Zins-

satz wesentlich beeinflußt werden, eine bedeutsame Rolle spielen, reichen solche Prognosen vielfach aus.

Die bekannteste, jedoch wenig angewendete, formfreie Vorgehensweise für qualitative Prognosen ist die Delphi-Methode (vgl. Wöller, 1980, S. 48ff).

Ein bekanntes, insbesondere in Frankreich im Zusammenhang mit Absatzprognosen zur Anwendung gelangtes formgebundenes qualitatives Prognosemodell ist das auf Moles & Caude (1970) zurückgehende Entwicklungsmatrizenverfahren (s.a. K. Weber, 1975, S. 3191).

K. Weber (1975) weist darauf hin, daß durch die Kombination von formfreien und formgebundenen Vorgehensweisen Prognoseverfahren höherer Ordnung zur Anwendung gelangen können. Eine ausführliche Betrachtung der qualitativen Prognosemethoden findet man u.a. bei Gisholt (1976, S. 111ff). Im weiteren Verlauf dieser Arbeit sollen ausschließlich quantitative Prognosemethoden, d.h. Vorgehensweisen die ihre Ergebnisse im wesentlichen unter Anwendung von mathematisch-statistischen Verfahren erzielen, betrachtet werden.

Bei den quantitativen Prognosen kann zwischen funktionstypfreien und funktionsgebundenen Verfahren unterschieden werden. Eine grundlegende funktionstypfreie Vorgehensweise ist das auf Brown (1959, 1963) zurückgehende Verfahren der exponentiellen Glättung ("exponential smoothing"), bei dem die in die Berechnung eingehenden n vergangenen Werte einer im Zeitverlauf abnehmenden exponentiellen Gewichtung unterzogen werden. Bezeichnet man den Gewichtungsfaktor mit α , so gilt:

$$(1.3.1) \quad S_{t+1} = \alpha \cdot x_t + (1 - \alpha) \cdot S_t \quad \text{mit} \quad 0 < \alpha < 1$$

Ersetzt man in Gleichung (1.3.1) den Prognosewert S_t durch die Formel $\alpha \cdot x_{t-1} + (1 - \alpha) \cdot S_{t-1}$ und analog S_{t-1} , S_{t-2} , ..., S_1 , so erhält man für die exponentielle Glättung erster Ordnung S_{t+1} ausschließlich in Abhängigkeit von den vergangenen Beobachtungen $x_t, \dots, x_0$:

$$(1.3.2) \quad S_{t+1} = \sum_{i=0}^t \alpha \cdot (1 - \alpha)^i \cdot x_{t-i} \quad \text{mit} \quad 0 < \alpha < 1$$

Alle bisher angeführten quantitativen Prognosetechniken sind funktionstypfrei. Im Zusammenhang mit den funktionsgebundenen Verfahren ist u.a. auf die Wachstumsfunktionen zu verweisen, wobei zwischen Funktionen mit oder ohne Sättigungswert unterschieden werden muß.

Betrachtet man Wachstumskurven ohne Sättigungswert, so können diese einen konkaven oder konvexen Verlauf haben. Geht man davon aus, daß eine ständige Erhöhung der vom Unternehmen beeinflussbaren Größe x_t , ein Beispiel hierfür sind die Werbeausgaben, zu einem immer geringer werdenden Zuwachs der beobachteten Größe y_t , wie z.B. dem Umsatz, führt, so ist eine Wachstumsfunktion mit konkavem Verlauf anzusetzen. Beispiele hierfür sind die Potenzfunktion

$$(1.3.3) \quad y_t = a \cdot x_t^b \quad \text{mit} \quad 0 < b < 1 ,$$

die häufig in logarithmierter Form geschrieben wird

$$(1.3.4) \quad \log(y_t) = \log(a) + b \cdot \log(x_t) \quad \text{mit} \quad 0 < b < 1 ,$$

sowie die logarithmische Funktion

$$(1.3.5) \quad y_t = a \cdot \log(x_t)$$

Die Funktionen (1.3.4) und (1.3.5) sind linear in den Parametern, so daß eine Schätzung dieser Parameter mit Hilfe der Methode der kleinsten Quadrate möglich ist.

Kann davon ausgegangen werden, daß mit wachsendem Mitteleinsatz x_t der Zuwachs der beobachteten Größe y_t ansteigt, so ist eine Wachstumsfunktion mit konvexem Verlauf anzusetzen. Dies ist insbesondere dann der Fall, wenn auf Grund der bisher vorliegenden Erhebungen ein steigender Trend zugrundegelegt werden kann. Ein Beispiel für eine entsprechende Wachstumskurve wäre eine Parabel zweiter Ordnung:

$$(1.3.6) \quad y_t = a \cdot x_t^2 + b \cdot x_t + c \quad \text{mit} \quad a > 0$$

Betrachtet man Wachstumsfunktionen mit Sättigungswert, sie werden auch als Sättigungsfunktionen bezeichnet, so haben diese in der Regel einen S-förmigen Verlauf. Die bekanntesten Beispiele hierfür sind die logistische Funktion

$$(1.3.7) \quad y_t = \frac{y^*}{1 + e^{\frac{a - b x_t}{y^*}}},$$

die Gompertzfunktion

$$(1.3.8) \quad y_t = y^* \cdot a^{(b^{x_t})} \quad \text{mit} \quad \log(a) < 0 \quad \text{und} \quad b < 1,$$

sowie die neuerdings im Rahmen von Decision-Calculus-Modellen verwendete Reaktionsfunktion (vgl. Little, 1970):

$$(1.3.9) \quad y_t = y_t(0) + \{y^* - y_t(0)\} \cdot \frac{x_t^s}{g + x_t^s} \quad \text{mit} \quad s > 1$$

In (1.3.9) kennzeichnet $y_t(0)$ denjenigen Absatz zum Zeitpunkt t , der auch bei einem Mitteleinsatz von $x_t = 0$ erreichbar wäre. In allen drei vorstehenden Beispielen steht y^* für den Sättigungsgrad, der nur erreicht wird, wenn $x_t \rightarrow \infty$ strebt. Eine schematische Darstellung von Wachstumskurven mit konkavem Verlauf und Sättigungsfunktionen mit S-förmigem Verlauf gibt Abbildung 1.6.

Die Gompertzfunktion (1.3.8) kommt in den Wirtschaftswissenschaften vor allem in den Bereichen Produktions- und Kosten-theorie zur Anwendung. Im Zusammenhang mit der logistischen Funktion (1.3.7) ist darauf hinzuweisen, daß sie "einen Wendepunkt hat, dessen Funktionswert stets dem halben Sättigungswert entspricht. Dies bedeutet, daß die Steigung der logistischen Funktion bis zum halben Sättigungswert progressiv und dann degressiv ist. Die Funktion ist deshalb vor allem für die

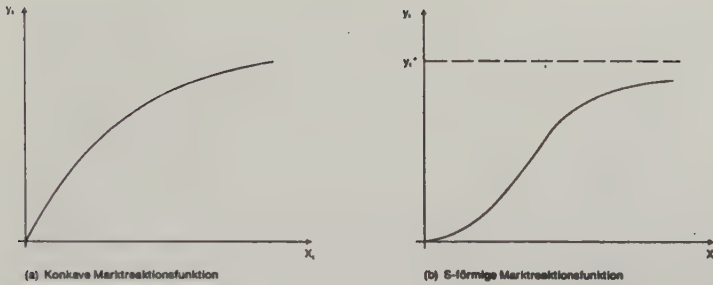


Abb. 1.6: Schematische Darstellung von Wachstumsfunktionen mit
a) konkavem Verlauf ohne Sättigungswert und
b) S-förmigem Verlauf mit Sättigungswert y^*
(aus: Meffert & Steffenhagen, 1977, S. 164)

mathematische Behandlung solcher Wachstumsprozesse geeignet, deren Wendepunkt im oder in der Nähe des halben Sättigungswerts liegt." (K. Weber, 1975, S. 3198) Meffert & Steffenhagen (1977) weisen darauf hin, daß S-förmige Wachstumsfunktionen u.a. auf Grund von Lerneffekten und des zu erwartenden wachsenden Marktwiderstands bei steigendem Mitteleinsatz x_t vor allem im Bereich der Werbung eingesetzt werden.

Die in den Parametern linearen Funktionen (1.3.4) und (1.3.5) sind spezielle Regressionsfunktionen. Solche regressionsanalytischen Ansätze zur Prognose können als Spezialfälle der ökonomischen Vorgehensweise betrachtet werden, auf die im nächsten Abschnitt eingegangen werden soll.

1.4 Ökonometrische bzw. Marketing-Prognosemodelle

Die Ökonometrie stellt eine Verbindung von ökonomischer Theorie, empirischer Wirtschaftsforschung und mathematisch-statistischen Modellen dar, um so die Verknüpfung zwischen verschiedensten ökonomischen Variablen, wie z.B. der Nachfrage, den Preisen und dem verfügbaren Einkommen erfassen zu können. "Economists are typically less interested in describing a single variable - like wheat sales - than in describing how two variables are related. For example, how does the interest rate influence investment? Econometrics is the measurement of such causal relationships, either to show how the economy operates, or to make predictions about the future. Thus an econometric estimate of how investments depends on the interest rate will throw light on the effectiveness of monetary policy. Similarly, an estimate of how consumption expenditures depend on income is necessary in order to predict the success of a tax reduction in stimulating employment." (Wonnacott & Wonnacott, 1979, S. 3)

Ökonometrische Modelle umfassen i.a. mehrere Gleichungen; ein Teil dieser Beziehungen sind Definitionsgleichungen, d.h. die Abhängigkeit einer Variablen von anderen ökonomischen Größen wird a priori eindeutig festgelegt. Hauptbestandteile eines jeden ökonometrischen Modells sind jedoch die Strukturgleichungen, die auch als Reaktionsgleichungen bezeichnet werden. Diese Gleichungen stellen die Beziehungen zwischen verschiedenen ökonomischen Variablen dar, deren Parameter zu schätzen sind; darüberhinaus sind sie stochastischer Natur, d.h. beinhalten einen Fehlerterm. "In der Literatur unterteilt man Reaktionsgleichungen in Verhaltensgleichungen, institutionelle Gleichungen und technologische Gleichungen. Die Abgrenzung zwischen ihnen ist fließend. Für die ökonometrische Theorie ist sie ohne Bedeutung. In den institutionellen Gleichungen kommt die Reaktion der Wirtschaftssubjekte auf institutionelle Gegebenheiten wie z.B. Steuertarife, Zollsätze, Maßnahmen der staatlichen Wirtschaftsförderung und Wirtschaftslenkung zum Ausdruck. ...

In technologischen Gleichungen drückt sich die Abhängigkeit

ökonomischer Größen von technischen Gegebenheiten der Produktionsprozesse aus. Beispiele hierfür sind Ertragsgesetze, Produktionsfunktionen oder Abschreibungsfunktionen, sofern man verbrauchsbedingt abschreibt. Die Verhaltensgleichungen drücken die Abhängigkeit ökonomischer Größen von anderen ökonomischen Größen aus. Beispiele hierzu sind Konsumfunktionen, ..., Angebots- und Nachfragefunktionen." (Rinne, 1976, S. 33)

Die meisten ökonometrischen Modelle sind interdependent, d.h. ein Teil der in dem Modell enthaltenen ökonomischen Größen tritt sowohl als erklärende als auch zu erklärende Variable auf. Somit ist für die Untersuchung dieser i.a. linearen Gleichungssysteme die Regressionsanalyse, d.h. insbesondere die Matrixalgebra, von grundlegender Bedeutung. Daher existiert für die mathematisch-statistische Behandlung ökonometrischer Modelle eine umfangreiche Literatur; in diesem Zusammenhang sei lediglich auf Dhrymes (1978), Johnston (1972), Parsons & Schultz (1978), Theil (1971a) sowie Wonnacott & Wonnacott (1979) verwiesen.

Ein sehr einfaches Beispiel für ein System simultaner Gleichungen, in dem sowohl die nachgefragte Menge $Q_{(N)}$ als auch die angebotene Menge $Q_{(A)}$ für jede der T Erhebungen vom Preis P abhängen, geben Makridakis & Wheelwright (1978a, S. 239f); hierbei gilt für $1 \leq t \leq T$:

$$(1.4.1) \quad \begin{aligned} Q_{(N),t} &= a + b \cdot P + e_{1,t} \\ Q_{(A),t} &= c + d \cdot P + e_{2,t} \end{aligned}$$

Hierbei stehen $e_{1,t}$ und $e_{2,t}$ für die Störterme der t -ten Beobachtung und a, b, c, d sind die simultan zu schätzenden Parameter des Systems.

Umfaßt ein Gleichungssystem allgemein m Gleichungen, d.h. m zu erklärende Variable y_i ($i = 1, \dots, m$) für die jeweils T Erhebungen vorliegen, sowie n simultan zu schätzende Parameter β_j ($j = 1, \dots, n$), so läßt sich dieses System mit Hilfe des $(mT \times 1)$ -Vektors $\underline{y}$ der zu erklärenden Variablen, des $(n \times 1)$ -Vektors $\underline{\beta}$ der zu schätzenden Parameter, des $(mT \times 1)$ -Vektors $\underline{e}$ der Fehlerterme sowie der als fehlerfrei angenommenen $(mT \times n)$ -Matrix X , die die erklärenden Variablen enthält, wie folgt darstellen:

$$(1.4.2) \quad \underline{y} = \underline{X}\underline{\beta} + \underline{e}$$

Betrachtet man das Gleichungssystem (1.4.1), so ist $m = 2$ und $n = 4$ und man erhält:

$$(1.4.3) \quad \begin{bmatrix} Q(N),1 \\ Q(A),1 \\ \vdots \\ Q(N),T \\ Q(A),T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & P & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & P \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & P & 0 & 0 \\ Q & 0 & 1 & P \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_{1,1} \\ e_{2,1} \\ \vdots \\ e_{1,T} \\ e_{2,T} \end{bmatrix}$$

Werden die Parameter mit Hilfe des OLS-Verfahrens geschätzt, so gilt:

$$(1.4.4) \quad \hat{\underline{\beta}} = (\underline{X}'\underline{X})^{-1}\underline{X}'\underline{y}$$

Eine eindeutige Lösung für $\hat{\underline{\beta}}$ existiert immer dann, wenn die Matrix $(\underline{X}'\underline{X})^{-1}$ in (1.4.4) existiert. $\hat{\underline{\beta}}$ ist eine erwartungstreue ("unbiased") Schätzung der unbekannten Parameter $\underline{\beta}$. Dies gilt jedoch nur, wenn man

- i) Normalverteilung der Residuen;
- ii) Unabhängigkeit der Residuen;
- iii) Homogenität der Varianzen der Residuen

voraussetzen kann. Sind die Punkte ii) und iii) erfüllt, so gilt:

$$(1.4.5) \quad E(e_i e_j) = \begin{cases} 0 & , \text{ falls } i \neq j \\ \sigma_e^2 = \text{const.} & , \text{ falls } i = j \end{cases}$$

Sind unter Verwendung von (1.4.4) die Parameter β_j geschätzt worden, so ist eine Prognose der zu erklärenden Variablen y_i möglich, indem man

$$(1.4.6) \quad \hat{\underline{y}} = \underline{X}\hat{\underline{\beta}}$$

bildet.

Der mit Hilfe von (1.4.6) prognostizierte Wert $\hat{y}$ wird nur in Ausnahmefällen exakt eintreffen. Hierfür sind in erster Linie fünf Gründe zu nennen (s.a. Schneeweiß, 1978), die im folgenden kurz erwähnt werden sollen. So kann ein Spezifikationsfehler vorliegen, d.h. sowohl der Aufbau des Modells als auch die Art und Anzahl der zu erklärenden Variablen y_i können falsch sein. Darüberhinaus können die zu schätzenden Parameter β_j zeitabhängig sein; dies führt zu einem Strukturbruch. Müssen die erklärenden Variablen selbst prognostiziert werden, so ist in der Regel davon auszugehen, daß auch sie mit einem Prognosefehler behaftet sind. Selbst wenn der wahre Parametervektor β für den Prognosezeitpunkt t^* bekannt ist, so kann nicht davon ausgegangen werden, daß der wahre Wert der zu erklärenden Variablen y zum Zeitpunkt t^* vorausgesagt wird, denn gemäß (1.4.2) unterscheiden sich der tatsächliche Wert y und der mit Hilfe des wahren Parametervektors β prognostizierte Wert $X\beta$ durch die Störvariable e ; für sie gilt:

$$(1.4.7) \quad e = y - X\beta$$

Letztlich kann eine ungünstig gezogene Stichprobe zu einem Schätzfehler in $\hat{\beta}$ führen, der sich bei der Berechnung der Prognosewerte gemäß (1.4.6) niederschlägt. Im Zusammenhang mit der Prognosegenauigkeit von ökonometrischen Modell weisen Green & Tull (1982, S. 482) darauf hin, daß ökonometrische Prognosen im Vergleich zu Vorhersagen, die unter Verwendung anderer Verfahren gewonnen werden, insbesondere dann genauer sind, wenn der Prognosehorizont, d.h. die Länge des Prognosezeitraums, zunimmt.

Wird mit Hilfe eines ökonometrischen Modells eine Prognose vorgenommen, so ist als Vorteil anzusehen, daß sämtliche Gleichungen des betrachteten Systems aus der ökonomischen Theorie heraus mit Hilfe von theoretischen Vorüberlegungen aufgestellt werden; somit handelt es sich um eine "kausale" Vorgehensweise und nicht um eine Modellbestimmung aus den Daten heraus. Sind die Strukturgleichungen jedoch nicht empirisch abgesichert,

"so verwandelt sich dieser Vor- in einen Nachteil: Die Beziehungszusammenhänge sind dann mehr oder weniger willkürlich.

Das gilt vor allem für das Hauptanwendungsfeld ökonometrischer Modelle, die Makroökonomie. Mikroökonomische Modelle sind demgegenüber in der Praxis seltener, wohl nicht nur wegen des damit verbundenen Aufwands, sondern auch der Tatsache, daß bei der 'Erklärung' von betriebswirtschaftlichen Größen letztlich auf solche gesamtwirtschaftlicher Art zurückgegriffen werden muß." (Hüttner, 1982, S. 65f)

Die meisten ökonometrischen Modelle, die ein einigermaßen realistisches Bild einer Volkswirtschaft im Zusammenhang mit Prognosen liefern können, umfassen 50 bis 200 Gleichungen. Da in ökonometrischen Modellen fast ausschließlich makroökonomische Größen betrachtet werden, finden sie nur selten bei Markt- und Absatzprognosen Verwendung. "Es ist jedoch nicht zu verkennen, daß sie oft ein Hilfsmittel für den betrieblichen Prognostiker bilden können - insofern, als aus ihnen vielleicht Daten anfallen (wie etwa der Branchenumsatz), die ihrerseits unmittelbar für Markt- und Absatzprognosen von Bedeutung sind." (Hüttner, 1982, S. 67)

Die meisten betriebswirtschaftlich ausgerichteten Markt- und Absatzprognosen basieren auf Marketing-Modellen. Faßt man den Begriff "Marketing-Modell" eng, so kann er als Anwendung ökonometrischer Modelle auf Marketing-Probleme angesehen werden; dies gilt u.a., weil viele Marketing-Modelle mit Hilfe der Regressionsanalyse behandelt werden können, da ihnen ein lineares Gleichungssystem zugrundeliegt. Verwendet man den Begriff "Marketing-Modell" jedoch im weitesten Sinne, so bezieht er sich nicht notwendigerweise auf ein Gleichungssystem, sondern es wird nahezu jede quantitative Beziehung zwischen Marketing-Variablen als "Marketing-Modell" bezeichnet.

Die folgende Abbildung 1.7 (vgl. Parsons & Schultz, 1978, S. 129) enthält die Beziehungen zwischen Daten bzw. a priori-Informationen, Marketing-Verallgemeinerungen, Marketing-Theorien und Marketing-Modellen in schematischer Form.

Empirische Beobachtungen
von Marketing-Phänomenen

A priori-Informationen
über Marketing-Phänomene

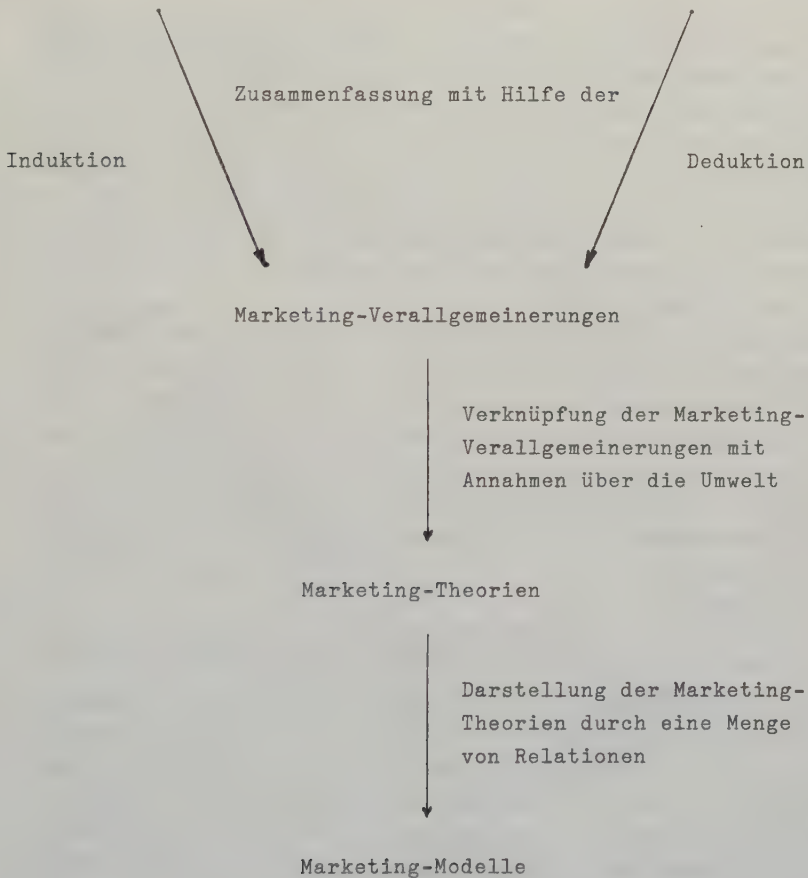


Abb. 1.7: Zusammenhang zwischen Daten, a priori-Informationen, Marketing-Verallgemeinerungen, Marketing-Theorien und Marketing-Modellen

Unter "Marketing-Verallgemeinerungen" versteht man die Zusammenfassung von Daten/Informationen, die die Phänomene beschreiben. Dies ist die induktive Vorgehensweise. Nicht alle Verallgemeinerungen werden mit Hilfe von Daten gewonnen. Geht man deduktiv vor, so gelangt man über a priori-Beurteilungen von Marketing-Phänomenen zu Marketing-Verallgemeinerungen. Diese sind per definitionem rein beschreibend und daher nicht testbar. Verknüpft man die getroffenen Marketing-Verallgemeinerungen mit Annahmen über die Umwelt, so erhält man eine Marketing-Theorie. Wird diese durch eine Menge von Relationen dargestellt, so erhält man ein Marketing-Modell, daß es einem ermöglicht, die Theorie mittels empirischer Daten zu testen.

Soll ein Marketing-Modell mit Hilfe eines regressionsanalytischen Ansatzes beschrieben werden, so ist darauf zu achten, ob zwischen der Realisation der abhängigen Variablen und der Realisation der unabhängigen Variablen ein time-lag besteht oder nicht. Die Einbeziehung eines time-lags in ein regressionsanalytisches Prognosemodell bereitet keine Schwierigkeiten, da diese Größe bereits vor der Prognoseperiode ermittelt worden ist. So sind beispielsweise die absatzpolitischen Aktivitäten eines Unternehmens u.U. vorausseilende Einflußgrößen. Die Ermittlung des optimalen time-lags erfolgt im Rahmen der Regressionsanalyse, indem mehrere hypothetische Regressionsgleichungen mit denselben Einflußfaktoren, jedoch unterschiedlichen time-lags, aufgestellt werden, und diejenige Gleichung, die den bisherigen Absatz optimal beschreibt, ausgewählt wird. "Durch Einbeziehung des Absatzes der Vorperiode als unabhängige Variable erfolgt die Berücksichtigung eines Zeitreihentrends. Auch time-lag-Beziehungen zwischen makroökonomischen, konjunkturrelevanten Indikatoren können nützlich sein, indem eine nicht verzögernd wirkende Einflußgröße als Funktion einer Einflußgröße mit verzögerter Wirkung ausgedrückt wird." (Rosentreter, 1977, S. 613)

Ein Beispiel für ein interdependentes Eingleichungsmodell mit time-lag gibt Clarke (1976), indem er die Verkäufe y zum Zeitpunkt t in Abhängigkeit von den Verkäufen in den p Vorperioden und den Werbeaufwendungen x sowohl zum Zeitpunkt t als auch in den r Vorperioden darstellt:

$$(1.4.8) \quad y_t = L + \sum_{k=1}^p \phi_k y_{t-k} + \sum_{j=0}^r \omega_j x_{t-j} + \epsilon_t$$

Liegt kein time-lag vor, so muß die Einflußgröße zunächst selbst prognostiziert werden, wobei von entscheidender Bedeutung ist, ob diese Größe vom Unternehmen beeinflusst werden kann oder nicht. Enthält das Modell eine nicht beeinflussbare Variable ohne time-lag, so bereitet dies im Rahmen einer Absatzprognose unter Verwendung der Regressionsanalyse erhebliche Schwierigkeiten, da eine solche Einflußgröße selbst prognostiziert werden muß und der mit dieser Vorhersage verbundene Prognosefehler den Prognosefehler der eigentlich vorherzusagenden Größe erheblich verstärken kann.

Bei den in diesem Abschnitt behandelten ökonometrischen und Marketing-Modellen ist grundsätzlich davon auszugehen, daß sie im Rahmen von theoretischen Vorüberlegungen erstellt werden. Dies gilt auch dann, wenn sie time-lags beinhalten. Im folgenden Abschnitt soll ein Überblick über Zeitreihenmodelle, die für Prognosezwecke benutzt werden, gegeben werden, wobei diese Modelle im Gegensatz zu den bisher behandelten Ansätzen nur aus den Daten heraus bestimmt werden.

1.5 Zeitreihenanalytische Prognosemodelle

Werden Zeitreihendaten mit Hilfe eines regressionsanalytischen Ansatzes ausgewertet, so wird man in aller Regel verzerrte Parameterschätzungen erhalten. Dies ist in erster Linie darauf zurückzuführen, daß sequentiell anfallende Daten y_t i.a. nicht unabhängig voneinander sind. Somit ist auch die Unabhängigkeit der Residuen nicht gewährleistet, d.h. die Bedingung (1.4.5) ist i.a. verletzt. Daher werden der Prognose von Zeitreihendaten häufig Modelle zugrundegelegt, die im Gegensatz zur ökonometrischen Vorgehensweise ausschließlich aus den Daten heraus bestimmt werden.

Zeitreihen lassen sich i.a. in eine Trendkomponente T , eine zyklische Komponente Z , wie z.B. konjunkturelle Schwankungen, eine Saisonkomponente S sowie einen Fehlerterm ϵ zerlegen.

Werden diese Größen additiv verknüpft, so ergibt sich:

$$(1.5.1) \quad y_t = T_t + Z_t + S_t + \varepsilon_t$$

Die Abbildung 1.8 zeigt die Komponenten einer Zeitreihe bei additiver Zerlegung.

Die Zeitreihenentwicklung läßt sich jedoch häufig eher durch eine multiplikative Verknüpfung der Grundkomponenten erklären, d.h. es gilt:

$$(1.5.2) \quad y_t = T_t \cdot Z_t \cdot S_t \cdot \varepsilon_t$$

Eine solche multiplikative Zerlegung einer Zeitreihe ist in Abbildung 1.9 dargestellt.

Soll eine Prognose durchgeführt werden, so sind sowohl beim additiven als auch beim multiplikativen Ansatz die Saison- und zyklischen Komponenten von geringer Bedeutung. "Im Mittelpunkt der Entwicklungsprognose steht vielmehr der Trend als Langfristkomponente einer Zeitreihe. Diese stark vereinfachende Betrachtungsweise hat zur starken Verbreitung von Trendmodellen in der Praxis der Marketing-Prognose geführt." (Meffert & Steffenhagen, 1977, S. 63) Den einfachsten Ansatz bildet in diesem Zusammenhang das lineare Trendmodell. Ein Beispiel für ein nicht-lineares Trendmodell ist die logistische Funktion (1.3.7).

Sollen in die Beschreibung eines Zeitreihenwertes y_t sowohl p vergangene Werte $y_{t-1}, \dots, y_{t-p}$ als auch die in den q vorherigen Perioden ermittelten Fehlerterme $a_{t-1}, \dots, a_{t-q}$ einbezogen werden, so ist dies möglich, indem man für die Beschreibung der Zeitreihe ein autoregressives integriertes Moving Average- (ARIMA-) Modell verwendet. Das allgemeine, von Box & Jenkins (1970) entwickelte ARIMA(p, d, q)-Modell lautet:

$$(1.5.3) \quad \phi(B)(1 - B)^d(y_t - \bar{y}) = \theta(B)a_t$$

$$\text{mit} \quad \phi(B) = 1 - \phi_1 B - \dots - \phi_p B^p$$

$$\text{und} \quad \theta(B) = 1 - \theta_1 B - \dots - \theta_q B^q$$

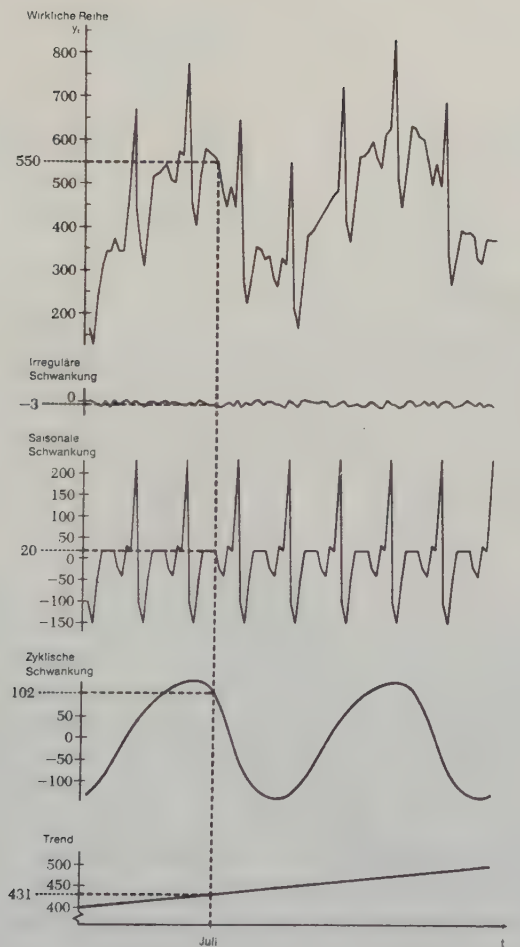


Abb. 1.8: Die Komponenten des additiven Zeitreihenmodells
(aus: Meffert & Steffenhagen, 1977, S. 62)

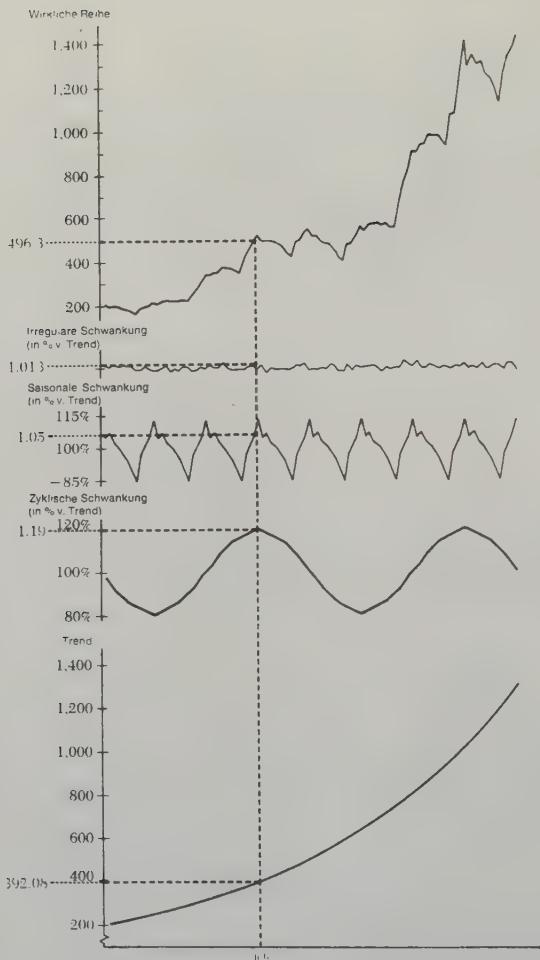


Abb. 1.9: Die Komponenten des multiplikativen Zeitreihenmodells
(aus: Meffert & Steffenhagen, 1977, S. 64)

In dem Modell (1.5.3) ist B der Backshiftoperator, d.h. es gilt $B^k y_t = y_{t-k}$. Ferner ist $\phi(B)$ ein stationärer AR-Operator und $\theta(B)$ ein invertierbarer MA-Operator, d.h. alle p Lösungen der charakteristischen Gleichung

$$(1.5.4) \quad \phi_p(\lambda) = 1 - \phi_1 \lambda - \phi_2 \lambda^2 - \dots - \phi_p \lambda^p = 0$$

bzw. alle q Lösungen von

$$(1.5.5) \quad \theta_q(\lambda) = 1 - \theta_1 \lambda - \theta_2 \lambda^2 - \dots - \theta_q \lambda^q = 0$$

liegen außerhalb des Einheitskreises.

Darüberhinaus ist (1.5.3) nach d-facher Differenzenbildung stationär, d.h. die d Lösungen von

$$(1.5.6) \quad (1 - B)^d y_t = \sum_{i=0}^d \binom{d}{i} (-1)^i B^i y_t = 0$$

liegen auf dem Einheitskreis.

Eine weitere Modellannahme besteht darin, daß die Residuen a_t einen sogenannten "white-noise"-Prozeß bilden müssen, d.h. die Fehlerterme a_t sind normalverteilt mit $E(a_t) = 0$ und $\text{Var}(a_t) = \sigma_a^2$ für alle t. Sind die vorstehenden Bedingungen nicht vollständig erfüllt, so ist keine korrekte Modellidentifikation vorgenommen worden. Dies kann z.B. geschehen, wenn die Zeitreihe zusätzliche Abhängigkeiten auf Grund von saisonalen Schwankungen enthält. Solche Interdependenzen lassen sich jedoch mit Hilfe eines erweiterten Modellansatzes, den sogenannten multiplikativen ARIMA-Modellen, erfassen. Es wird ausgegangen von dem Modell

$$(1.5.7) \quad \phi(B^S)(1 - B^S)^D(y_t - \bar{y}) = \theta(B^S)\epsilon_t, \quad ,$$

wobei die ϵ_t nunmehr jedoch in der Regel keinen "white-noise"-Prozeß darstellen, sondern selber einem ARIMA-Modell der Form

$\phi(B)(1 - B)^d \varepsilon_t = \theta(B)a_t$ gehorchen, so daß man insgesamt das Modell

$$(1.5.8) \quad \phi(B^S)\phi(B)(1 - B^S)^D(1 - B)^d(y_t - \bar{y}) = \theta(B^S)\theta(B)a_t$$

$$\text{mit} \quad \phi(B^S) = 1 - \phi_S B^S - \dots - \phi_{PS} B^{PS}$$

$$\text{und} \quad \theta(B^S) = 1 - \theta_S B^S - \dots - \theta_{QS} B^{QS}$$

erhält (vgl. Box & Jenkins, 1970, S. 304; Abraham & Ledolter, 1983, S. 283).

Betrachtet man univariate ARIMA(p,d,q)-Modelle der Form (1.5.3), so führen Geurts & Ibrahim (1975) aus, daß zwischen diesen Zeitreihenmodellen und dem in Abschnitt 1.3 dargestellten Verfahren der exponentiellen Glättung erster Ordnung ein enger Zusammenhang besteht. Geht man von der Darstellung (1.3.2) aus, so ergibt sich:

$$(1.5.9) \quad S_{t+1} = \alpha \cdot \sum_{i=0}^{t-1} (1 - \alpha)^i \cdot x_{t-i} + \alpha \cdot (1 - \alpha)^t \cdot x_0$$

Geurts & Ibrahim (1975) führen aus, daß die Darstellungsform (1.5.9) auf der Annahme beruht, daß sich die x_t mit Hilfe vergangener Werte x_{t-i} , die einer exponentiell abnehmenden Gewichtung unterliegen, sowie einem "white-noise"-Anteil a_t beschreiben lassen. Somit gehorchen die x_t einem Modell der Form

$$(1.5.10) \quad x_t = \alpha \cdot \sum_{i=1}^{\infty} (1 - \alpha)^{i-1} \cdot x_{t-i} + a_t, \quad ,$$

d.h. lassen sich mit Hilfe eines unendlichen AR-Prozesses erfassen. Ferner folgt aus (1.5.10):

$$(1.5.11) \quad (1 - \alpha) \cdot x_{t-1} = \alpha \cdot \sum_{i=1}^{\infty} (1 - \alpha)^i \cdot x_{t-1-i} + (1 - \alpha) \cdot a_{t-1}$$

Bildet man nunmehr die Differenz $x_t - (1 - \alpha) \cdot x_{t-1}$, so ergibt sich:

$$(1.5.12) \quad x_t - x_{t-1} = a_t - (1 - \alpha) \cdot a_{t-1}$$

Somit läßt sich der unendliche AR-Prozeß (1.5.10) mit Hilfe eines ARIMA(0,1,1)-Modells darstellen.

Die bisherigen Ausführungen deuten an, daß die Klasse der ARIMA-Modelle eine Verallgemeinerung bestimmter zeitreihenanalytischer Verfahren darstellt. So entspricht die auf Brown (1963) zurückgehende Vorgehensweise der exponentiellen Glättung einem autoregressiven Ansatz und bestimmte Techniken der gleitenden Durchschnittsbildung können unter Verwendung eines MA-Modells erfaßt werden.

Es läßt sich ebenfalls eine Beziehung zwischen bestimmten ökonomischen Ansätzen und den ARIMA-Modellen von Box & Jenkins (1970) aufzeigen. Werden z.B. in einem ökonomischen Eingleichungsmodell die p vergangenen endogenen Variablenwerte y_{t-1} , ..., y_{t-p} , jedoch keine exogenen Einflußgrößen, berücksichtigt, so gilt:

$$(1.5.13) \quad y_t = \sum_{i=1}^p c_i y_{t-i} + a_t$$

Hierbei gilt wiederum, daß der Fehlerterm a_t unabhängig und normalverteilt mit $E(a_t) = 0$ ist. Gleichung (1.5.13) stellt einen autoregressiven Prozeß in den Rohdaten dar. Berücksichtigt man in Gleichung (1.5.13) zusätzlich einen konstanten Term θ_0 , für den $\theta_0 = (1 - c_1 - \dots - c_p) \cdot \bar{y}$ gilt, so folgt:

$$(1.5.14) \quad y_t = (1 - \sum_{i=1}^p c_i) \cdot \bar{y} + \sum_{i=1}^p c_i y_{t-i} + a_t$$

bzw.

$$(1.5.15) \quad y_t = \bar{y} + \sum_{i=1}^p c_i \cdot (y_{t-i} - \bar{y}) + a_t$$

Somit stellt (1.5.15) einen ARIMA($p,0,0$)-Prozeß nach Box & Jenkins (1970) dar, falls sämtliche p Parameter $c_i = \phi_i$ die Stationaritätsbedingung (1.5.4) erfüllen.

Läßt sich die Differenzengleichung (1.5.15) nicht mit Hilfe eines stationären AR-Prozesses erfassen, so läßt sich (1.5.13) bzw.

(1.5.15) nach entsprechender Differenzenbildung mit einem ARIMA-Modell beschreiben. Definiert man beispielsweise für $1 \leq i \leq p-1$

$$(1.5.16) \quad \phi_i := \sum_{j=1}^i c_j - 1$$

und gilt darüberhinaus $c_p = -\phi_{p-1}$, so folgt:

$$(1.5.17) \quad y_t = (1 + \phi_1) \cdot y_{t-1} + \sum_{i=2}^{p-1} (\phi_i - \phi_{i-1}) \cdot y_{t-i} - \phi_{p-1} \cdot y_{t-p} + a_t$$

Aus (1.5.17) ergibt sich:

$$(1.5.18) \quad y_t = y_{t-1} + \sum_{i=1}^{p-1} \phi_i \cdot (y_{t-i} - y_{t-i-1}) + a_t$$

Somit entspricht der Differenzengleichung ein ARIMA(p-1,1,0)-Prozeß, falls die autoregressiven Parameter ϕ_i die Stationaritätsbedingung erfüllen. Anderenfalls ist eine Differenzenbildung höherer Ordnung erforderlich. Die vorstehenden Ausführungen deuten an, daß sich jede Differenzengleichung der Form (1.5.14) mit Hilfe eines entsprechenden ARIMA-Modells beschreiben läßt.

Betrachtet man einen ARIMA-Prozeß, der keinen MA-Anteil enthält, d.h. ein ARIMA(p,d,0)-Modell, so läßt sich dieses mit Hilfe einer Differenzengleichung (p+d)-ter Ordnung darstellen. Ist der Prozeß stationär, d.h. gilt $d = 0$, so ergibt sich

$$(1.5.19) \quad y_t = \bar{y} + \sum_{i=1}^p \phi_i \cdot (y_{t-i} - \bar{y}) + a_t$$

bzw.

$$(1.5.20) \quad y_t = \sum_{i=1}^p \phi_i y_{t-i} + (1 - \sum_{i=1}^p \phi_i) \cdot \bar{y} + a_t$$

und man erhält eine Differenzengleichung p-ter Ordnung der Form (1.5.14).

Ist $d > 0$, so gilt:

$$(1.5.21) \quad (1 - \sum_{i=1}^p \phi_i B^i) \cdot (1 - B)^d y_t = a_t$$

bzw.

$$(1.5.22) \quad (1 - \sum_{i=1}^p \phi_i B^i) \cdot (\sum_{j=0}^d \binom{d}{j} (-1)^j y_{t-j}) = a_t$$

Für die Koeffizienten γ_k des Polynoms $\gamma(B) = \phi(B) \cdot (1 - B)^d$ ergibt sich (vgl. Glass, Willson & Gottman, 1975, S. 153):

$$(1.5.23) \quad \gamma_k = \sum_{r=0}^k \binom{d}{r} (-1)^r (-\phi_{k-r})$$

mit $-\phi_0 = 1$; $\binom{d}{r} = 0$ für $r > d$; $-\phi_{k-r} = 0$ für $k-r > p$.

Da $\gamma_0 = 1$ gilt, erhält man für (1.5.22) die Darstellung:

$$(1.5.24) \quad (1 + \sum_{i=1}^{p+d} \gamma_i B^i) \cdot y_t = a_t$$

bzw.

$$(1.5.25) \quad y_t = -\sum_{i=1}^{p+d} \gamma_i y_{t-i} + a_t$$

Setzt man für $1 \leq i \leq p+d$ $c_i = -\gamma_i$, so läßt sich erkennen, daß jedem ARIMA(p,d,0)-Prozeß mit $d > 0$ eine Differenzengleichung (p+d)-ter Ordnung der Form (1.5.13) entspricht.

Betrachtet man Differenzengleichungssysteme mit m Gleichungen p-ter Ordnung und stellt diese den ARIMA-Modellen gegenüber, so ergeben sich zu den vorstehenden Ausführungen analoge Aussagen. Hierauf soll an dieser Stelle jedoch nicht eingegangen werden, da sonst multivariate ARIMA-Modelle in die Betrachtungen einbezogen werden müßten. Aus den vorstehenden Ausführungen ergibt sich, daß ein Rückschluß von Zeitreihenmodellen auf bestimmte ökonometrische Ansätze möglich ist, falls der den Daten zugrundeliegende ARIMA-Prozeß eine entsprechende Struktur hat. Somit deutet sich die Möglichkeit an, daß die ARIMA-Technik einen Beitrag zur Modellbildung in der Ökonometrie leisten kann, wenn bestimmte Voraussetzungen erfüllt sind.

Die ARIMA-Technik wird hauptsächlich für die kurzfristige Prognose von Zeitreihendaten eingesetzt. "Bestimmte Methodentypen des ARIMA-Ansatzes erlauben in bestimmten Fällen auch die Auf-
findung eines Entwicklungsprofils, das der mittelfristigen Analyse entspricht. Diese Methode gestattet außerdem die Erstellung

sehr einfacher Hypothesen über den langfristigen Grundtrend und läßt bestimmte Oszillationen um diese Linie erkennen." (Lewandowski, 1980, S. 91)

Als eine Hauptschwierigkeit im Zusammenhang mit ARIMA-Modellen ist anzusehen, daß sie selbst bei Vorliegen optimaler Voraussetzungen, wie etwa hoher Stabilität der betrachteten Zeitreihe, nur für Prognosen mit einem Prognosehorizont von weniger als einem Jahr einsetzbar sind. Als ein Grund hierfür wird genannt, daß mit Hilfe des ARIMA-Ansatzes nicht die Ermittlung der langfristigen Trendkomponente möglich ist, d.h. es kann i.a. nur eine verzerrte Konjunkturkomponente bestimmt werden.

Im weiteren ist darauf hinzuweisen, daß die Ermittlung des einer Zeitreihe zugrundeliegenden $ARIMA(p,d,q)$ -Modells, und hierbei insbesondere die Identifikation, d.h. die Bestimmung von p , d und q , recht aufwendig ist. Dies ist in erster Linie darauf zurückzuführen, daß bei Verwendung der vorliegenden Techniken ARIMA-Modelle nur für relativ lange Zeitreihen bestimmt werden können und die mit Hilfe dieser Verfahren gewonnenen Ergebnisse im starken Maße von subjektiven Entscheidungen abhängen, die eine hohe mathematische Qualifikation der mit der Auswertung beauftragten Analytiker erfordern (s.a. Lewandowski, 1980, S. 94f).

Die mit der Bestimmung der Modellparameter verbundene Unsicherheit ist daraus zu erklären, daß für die Überprüfung von Hypothesen über die Modellparameter keine statistischen Testverfahren, wie etwa der t -Test oder der F -Test, zur Verfügung stehen. Um die angesprochenen Kritikpunkte zu verdeutlichen, soll im folgenden Kapitel auf die Bestimmung von univariaten und multiplikativen ARIMA-Modellen unter Verwendung der herkömmlichen Verfahren eingegangen werden.

2. Das Fitten von univariaten und multiplikativen ARIMA-Modellen

"Die Auswertung von zeitbezogenen Daten macht i.allg. die Anwendung spezieller statistischer Verfahren notwendig. Die Begründung hierfür liegt in der sog. 'Abhängigkeit' der Daten: Man nimmt im Gegensatz zur Querschnittsuntersuchung an, daß die Daten eine gewisse 'Trägheit' oder ein 'Beharrungsvermögen' aufweisen. Diesen Effekt kann man auf physiologische Prozesse oder psychologische Ursachen wie 'Erinnerungs'- und 'Gewöhnungseffekte' oder auch regelmäßig wiederkehrende äußere Einflüsse (wie z.B. regelmäßige Berufstätigkeit) zurückführen. Diese zeitliche Abhängigkeit der Daten wird auch Autokorreliertheit genannt. Die Verwendung 'normaler' statistischer Verfahren zur Analyse autokorrelierter Daten liefert verzerrte Prüfgrößen, die zu falschen Interpretationen führen." (Möbus, Görücke & Kröh, 1985, S. 170)

Im folgenden Kapitel soll für eine Zeitreihe $\{y_t\}$ der Länge T das Fitten eines univariaten ARIMA-Modells der Form (1.5.3) bzw. die Bestimmung eines multiplikativen ARIMA-Modells der Form (1.5.7) bei Verwendung der herkömmlichen Vorgehensweise beschrieben werden. Hierbei umfaßt das Fitten die Identifikation der nichtsaisonalen Modellparameter p , d und q und u.U. der saisonalen Modellparameter s , P , D und Q sowie die Schätzung der Parameter $\underline{\phi}' = (\phi_1, \dots, \phi_p)$, $\underline{\theta}' = (\theta_1, \dots, \theta_q)$, $\underline{\phi}' = (\phi_s, \phi_{2s}, \dots, \phi_{Ps})$ und $\underline{\theta}' = (\theta_s, \theta_{2s}, \dots, \theta_{Qs})$. Abschließend wird das ermittelte $ARIMA(p,d,q) \times (P,D,Q)_s$ -Modell auf Adäquatheit überprüft, d.h. es muß festgestellt werden, ob die Residuen a_t unabhängig und normalverteilt mit $E(a_t) = 0$ und $Var(a_t) = \sigma_a^2$ für alle t sind.

Nach Box & Jenkins (1970) ist das Fitten von ARIMA-Modellen, d.h. die Identifikation, die Parameterschätzung und die Modelldiagnostik ein iterativer Prozeß, wie er in Abbildung 2.1 schematisch dargestellt ist.

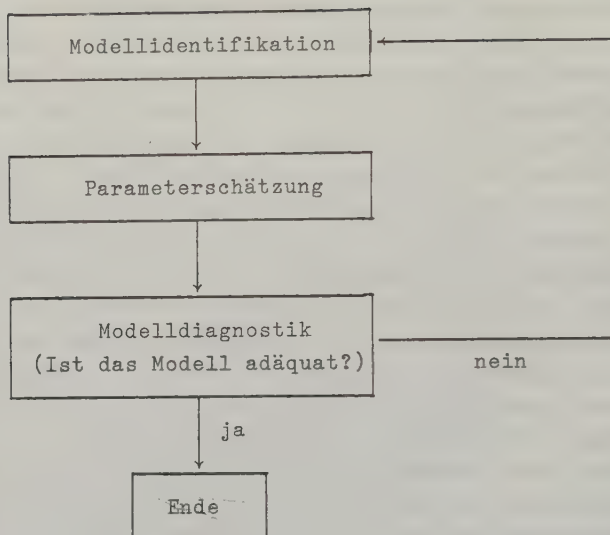


Abb. 2.1: Schematische Darstellung der Box & Jenkins-Methode

2.1 Modellidentifikation nach Box & Jenkins

Möbus & Nagl (1983, S. 264) weisen darauf hin, daß die Modellidentifikation mit einem Plot der Zeitreihe beginnt, um visuell eine eventuell vorhandene Nichtstationarität der Varianz der Residuen ermitteln zu können. Eine u.U. vorhandene Varianzheteroskedastie läßt sich i.a. durch entsprechende Transformationen der Originaldaten reduzieren. "If the variance of the series changes with the level, logarithmic transformation will often stabilize the variance. If the logarithmic transformation will does not stabilize the variance, we can adopt a more general approach and employ the class of power functions." (Abraham & Ledolter, 1983, S. 248)

Solche allgemeineren Ansätze sind z.B. die Reziproktransformation oder die Wurzeltransformation der Originaldaten. Eine ausführliche Abhandlung varianzstabilisierender Transformationen

findet man u.a. bei Box & Cox (1964). An Hand empirischer Beispiele hat sich jedoch gezeigt, daß die logarithmische Transformation i.a. den Anforderungen genügt, so daß im folgenden im Falle der Varianzheteroskedastie ausschließlich logarithmisch transformierte Daten betrachtet werden sollen. Hierbei ist zu beachten, daß statt der Originaldaten die Daten $y_t + c$ mit geeignetem $c > 0$ zu logarithmieren sind, falls das Minimum der Originaldaten kleiner oder gleich Null ist.

2.1.1 Ermittlung des nichtsaisonalen Differenzengrades d

Betrachtet man eine homogene, jedoch nicht stationäre Zeitreihe, so ist der Mittelwert der Zeitreihendaten und damit auch die zugehörige Autokorrelationsfunktion nicht eindeutig festgelegt; darüberhinaus läßt sich zeigen, daß die Autokorrelationsfunktion in diesem Fall einen sehr flachen Verlauf nimmt. Daher wird in der Literatur (Box & Jenkins, 1970; Glass, Willson & Gottman, 1975) als Kriterium für Nichtstationarität angegeben, daß die Autokorrelationsfunktion einen besonders flachen Verlauf nimmt. Dieses Kriterium ist jedoch sehr unbefriedigend, denn "durch das Fehlen eines statistischen Kriteriums kommt eine subjektive Komponente ins Spiel, die alle anschließenden Analysen determiniert, ... " (Keeser, 1979, S. 60)

Ein erstes statistisches Verfahren zur Bestimmung des nichtsaisonalen Differenzengrades d haben Tintner & Rao (1963) entwickelt. Es besagt, daß sich eine Zeitreihe, die sich durch ein Polynom k-ter Ordnung und eine Zufallsvariable ϵ_t darstellen läßt, mit Hilfe der Differenzenbildung als ein Polynom $(k - 1)$ -ter Ordnung darstellen läßt. Es werden daher sequentiell Varianzbrüche der Form

$$(2.1.1) \quad \frac{VD_{k+1}}{VD_k} \quad (\text{Polynom k-ter Ordnung})$$

überprüft, wobei

$$(2.1.2) \quad VD_k = \sigma^2_{(1-B)^k y_t}$$

die Varianz der k-ten Differenzenreihe ist. Varianzquotienten der Form (2.1.1) werden solange in absteigender Reihenfolge gebildet, bis ein d gefunden ist, für das

$$(2.1.3) \quad \frac{VD_d}{VD_{d+1}} \leq \lambda_{d-1}(\alpha\%)$$

gilt. Es ist dann d der notwendige Differenzengrad. Tintner & Rao (1963) haben für verschiedene Signifikanzniveaus α die kritischen Werte λ tabellarisch zusammengefaßt.

Abgesehen von der Tatsache, daß die kritischen Werte λ nicht allgemein zugänglich sind, ist das beschriebene Verfahren nur anwendbar, wenn die gesamte Zeitreihe bereits vorliegt. Darüberhinaus kann nur der α -Fehler a priori festgelegt werden. Gerade in bezug auf die Bestimmung des Differenzengrades d sollte man jedoch sowohl den α - als auch den β -Fehler a priori festlegen können.

Geht man in der Differenzenbildung zu weit, d.h. begeht man einen α -Fehler, so bleibt zwar die Stationarität erhalten, es entsteht jedoch eine neue Abhängigkeit. Bildet man z.B. für den "white-noise"-Prozeß

$$(2.1.4) \quad y_t - \bar{y} = a_t$$

Differenzen, so erhält man den nicht invertierbaren ARIMA(0,0,1)-Prozeß

$$(2.1.5) \quad w_t = y_t - y_{t-1} = a_t - a_{t-1}$$

mit $\theta_1 = 1.0$.

Begeht man auf der anderen Seite einen β -Fehler, d.h. wird d zu niedrig angesetzt, so bleibt die Zeitreihe nichtstationär und die mathematischen Voraussetzungen für AR- und MA-Prozesse sind verletzt.

Nach Yaglom (1955) gilt ferner, daß eine homogene nichtstationäre Zeitreihe ihre interne Abhängigkeitsstruktur nicht verliert, wenn sie durch d-fache Differenzenbildung stationär gemacht wird. Vor diesem Hintergrund kann man sich nichtstationäre Zeitreihendaten als d-fache Summation von stationären Daten vorstellen. Dies ist mit dem I in ARIMA gemeint, das für "integriert" steht.

Ist der nichtsaisonale Differenzengrad d bestimmt worden, so stehen für die weitere Untersuchung T - d Daten zur Verfügung und es gilt nunmehr zu ermitteln, ob ein saisonales Pattern vorliegt.

2.1.2 Die Bestimmung saisonaler Schwankungen s sowie des saisonalen Differenzengrades D

Sowohl für die Identifikation von nichtsaisonalen ARMA(p,q)-Modellen und saisonalen ARMA(P,Q)_s-Prozessen als auch zur Bestimmung einer saisonalen Schwankung s verwenden Box & Jenkins (1970) die Autokorrelationsfunktion (ACF bzw. SACF) und die partielle Autokorrelationsfunktion (PACF). Hierbei ist für einen stationären stochastischen Prozeß {y_t} die theoretische Autokorrelation zum Lag k durch den nachstehenden Quotienten definiert:

$$(2.1.6) \quad \rho_k = \frac{\text{Cov}(y_t, y_{t+k})}{\text{Var}(y_t)} \quad \text{mit} \quad \rho_0 = 1 \quad \text{und} \quad |\rho_k| \leq 1$$

Für die Schätzung der Autokorrelationen ρ_k aus T Daten findet man in der Literatur (Box & Jenkins, 1970; Kendall, 1973; Nelson, 1973) u.a. die nachstehende Formel:

$$(2.1.7) \quad r_k = \frac{\sum_{t=1}^{T-k} (y_t - \bar{y})(y_{t+k} - \bar{y})}{\sum_{t=1}^T (y_t - \bar{y})^2}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Die partiellen Autokorrelationskoeffizienten ϕ_{kk} erhält man für $k = 1, 2, \dots$ mit Hilfe der sogenannten Yule-Walker-Gleichungen (vgl. Box & Jenkins, 1970; Nelson, 1973):

$$(2.1.8) \quad \begin{bmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \vdots \\ \rho_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 & \dots & \rho_{k-1} \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 & \dots & \rho_{k-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{k-1} & \rho_{k-2} & \rho_{k-3} & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_{k1} \\ \phi_{k2} \\ \vdots \\ \phi_{kk} \end{bmatrix}$$

bzw. kurz:

$$(2.1.9) \quad \underline{\rho}_k \cdot \underline{\phi}_{kk} = \underline{\rho}_k$$

Hierbei sind $\underline{\phi}_{kk}$ und $\underline{\rho}_k$ ($k \times 1$)-Vektoren sowie $\underline{\rho}_k$ eine ($k \times k$)-Matrix. Unter Verwendung der Cramerschen Regel ergibt sich nunmehr:

$$(2.1.10) \quad \phi_{kk} = \frac{\det(\underline{\rho}_k^*)}{\det(\underline{\rho}_k)}$$

Hierbei steht im Nenner die Determinante der ($k \times k$)-Autokorrelationsmatrix $\underline{\rho}_k$ aus (2.1.9) und im Zähler die Determinante derselben Matrix, deren k -ter Spaltenvektor jedoch durch den Spaltenvektor $(\rho_1, \dots, \rho_k)'$ ersetzt worden ist. Für ϕ_{kk} erhält man Anfangsschätzungen, indem man in (2.1.9) bzw.

(2.1.10) ρ_i durch r_i ersetzt.

Zur Identifikation der Saisonalität untersuchen Box & Jenkins (1970) und andere Autoren die Autokorrelationsfunktion sowie die partielle Autokorrelationsfunktion und ermitteln eine Periodizität der Länge s mit Hilfe der Autokorrelationskoeffizienten $\hat{\rho}_s, \hat{\rho}_{2s}, \dots$ und/oder der partiellen Autokorrelationskoeffizienten $\hat{\phi}_{ss}, \hat{\phi}_{2s, 2s}, \dots$. Diese heuristische Vorgehensweise ist unbefriedigend, da kein statistischer Test zugrundegelegt wird. Ein weiteres Problem ist darin zu sehen, daß eine große Datenmenge zur Verfügung stehen muß, um eine Saisonalität identifizieren zu können.

Liegt ein saisonales Pattern vor, so wird eine eventuell vorliegende periodische Nichtstationarität ermittelt, indem man die Autokorrelationskoeffizienten $r_s, r_{2s}, r_{3s}, \dots$ analog wie bei der Bestimmung von d untersucht. Nehmen diese Autokorrelationskoeffizienten einen besonders flachen Verlauf, d.h. ermittelt man ein $D > 0$, so ist der periodische Differenzenoperator $(1 - B^s)^D$ anzuwenden, d.h. man erhält die Zeitreihe $(1 - B)^d(1 - B^s)^D y_t$ mit $T - d - D \cdot s$ Daten. Es gilt nunmehr, daß der stationären Zeitreihe zugrundeliegende u.U. multiplikative ARMA-Modell zu ermitteln.

2.1.3 Identifikation des nichtsaisonalen ARMA(p,q)-Modells

Die Identifikation von p und q erfolgt unter Verwendung der im vorigen Abschnitt dargestellten SACF und PACF, wobei jedoch der "periodische" Anteil der SACF und PACF nicht mit in die Betrachtung einbezogen werden darf.

Liegt der Zeitreihe ein ARMA(p,0)-Prozeß zugrunde, so haben Box & Jenkins (1970, S. 54) gezeigt, daß die SACF eines solchen Prozesses sich i.a. aus einem gedämpften exponentiellen Abfall und gedämpften Sinusschwingungen zusammensetzt. Hingegen gilt für die theoretische PACF eines solchen Prozesses $\phi_{kk} \neq 0$ für $k \leq p$ und $\phi_{kk} = 0$ für $k > p$. Betrachtet man jedoch eine Zeitreihe, die sich mit Hilfe eines ARMA(0,q)-Modells beschreiben läßt, so bricht die SACF nach dem Lag q ab, d.h. es gilt $\rho_k \neq 0$ für $k \leq q$ und $\rho_k = 0$ für $k > q$. Darüberhinaus folgt die PACF eines solchen Prozesses einer unendlich exponentiell gedämpften Kurve und/oder sie verläuft gedämpft alternierend (vgl. Box & Jenkins, 1970, S. 68). Somit läßt sich ein ARMA(p,0)-Prozeß an Hand der PACF identifizieren und ein ARMA(0,q)-Modell kann unter Verwendung der SACF ermittelt werden.

"However, when p and q are both greater than zero, the autocorrelation and partial autocorrelation function do not possess graphs that uniquely determine p and q by simple inspection." (Woodward & Gray, 1981, S. 580) Denn im Falle eines gemischten ARMA(p,q)-Modells haben sowohl die SACF als auch die PACF eine

unendliche gedämpft alternierende und/oder gedämpft exponentiell abfallende Ausdehnung. Dies hat zur Folge, daß die Identifikation eines $\text{ARMA}(p,q)$ -Modells mit Hilfe von SACF und PACF subjektiv determiniert ist, da keine eindeutigen theoretischen Aussagen über das Verhalten der SACF vor und nach dem Lag q bzw. der PACF vor und nach dem Lag p mehr vorliegen. Eine schematische Zusammenfassung zur Identifikation eines ARIMA-Modells gibt Abbildung 2.2 .

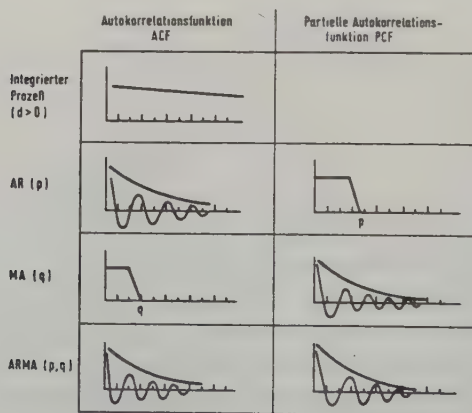


Abb. 2.2: Grob-Schema zur Identifikation nach Box & Jenkins
(aus: Revenstorf & Keeser, 1979, S. 195)

Ein weiteres Hauptproblem bei der Bestimmung des "richtigen" ARMA-Modells mit Hilfe von SACF und PACF besteht in der hierfür erforderlichen großen Datenmenge. Zum einen erkennt man an Hand von Formel (2.1.7), daß die Anzahl der Meßwerte, die in die Schätzung von ρ_k eingehen, geringer wird, wenn man ein größeres k wählt (vgl. hierzu Dahme, 1977; Revenstorf, 1979). Box & Jenkins (1970, S. 33) geben daher Heuristiken an: "In practise,

to obtain a useful estimate of the autocorrelation function, we would at least fifty observations and the estimated autocorrelation r_k would be calculated for $k=0,1,2,\dots,K$ where K was not larger than say $n/4$."

Ist die erhobene Datenmenge klein, so kann dies noch gravierendere Folgen für die Bestimmung und Interpretation der PACF haben. Dahme (1979, S. 255) bemerkt dazu:

"Die Schätzung von Korrelogrammen wird jedoch statistisch sinnlos, wenn pro Behandlungsphase etwa nur 5 - 10 Meßwerte zur Verfügung stehen. Besonders bei der Schätzung des Partial-Autokorrelogramms in der üblichen Weise mit Hilfe sukzessiver Yule-Walker-Gleichungen nach Durbin (1960) kann es zu grotesken Verzerrungen der Partial-Autokorrelationskoeffizienten kommen."

2.1.4 Identifikation des saisonalen $ARMA(P,Q)_s$ -Modells

Das jeweilige saisonale $ARMA(P,Q)_s$ -Modell eines homogenen stationären periodischen Prozesses erkennt man daran, daß die "periodischen" Autokorrelationen $r_s, r_{2s}, \dots$ sowie die partiellen Autokorrelationen $\hat{\phi}_{ss}, \hat{\phi}_{2s,2s}, \dots$ in ihrem Verhalten völlig dem von gewöhnlichen nichtsaisonalen $ARMA$ -Modellen entsprechen. Daher wendet man die in Abschnitt 2.1.3 dargestellten Methoden auf die "periodischen" Anteile der SACF und PACF an. Um P, D und Q identifizieren zu können ist es jedoch erforderlich mindestens $5 \cdot s$ Autokorrelationen und partielle Autokorrelationen zu berechnen.

Die Interaktion zwischen dem saisonalen und nichtsaisonalen Anteil in dem multiplikativen Modell macht die Identifikation mit Hilfe der SACF und PACF äußerst schwierig, so daß der in Abbildung 2.1 dargestellte iterative Prozeß der Modellbildung häufiger als bei der Modellbestimmung eines gewöhnlichen $ARIMA(p,d,q)$ -Prozesses durchlaufen werden muß. Eine Zusammenstellung von SACF und PACF für einige wichtige multiplikative Modelle geben Box & Jenkins (1970, S. 329ff).

2.2 Neuere Ansätze der Modellidentifikation

Um die dargestellten Schwierigkeiten bei der Identifikation von ARMA(p,q)-Modellen zu umgehen, wurden in den letzten Jahren verschiedene Ansätze entwickelt. So haben u.a. Woodward & Gray (1981) sowie Tiao & Box (1981) zur Modellidentifikation eine verallgemeinerte Form der PACF, die GPACF, verwendet. In vollkommener Analogie zu Gleichung (2.1.10) ist der partielle Autokorrelationskoeffizient ϕ_{kk} gegeben durch

$$(2.2.1) \quad \phi_{kk} = \begin{cases} \rho_k & , \text{ falls } k = 1 \\ \frac{\det(A(k,0))}{\det(B(k,0))} & , \text{ falls } k > 1 \end{cases}$$

Hierbei ist $B(1,k)$ die (1×1) -Matrix

$$(2.2.2) \quad B(1,k) = \begin{bmatrix} \rho_k & \rho_{k-1} & \cdots & \rho_{k-1+1} \\ \rho_{k+1} & \rho_k & \cdots & \rho_{k-1+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{k+1-1} & \rho_{k+1-2} & \cdots & \rho_k \end{bmatrix}$$

und $A(1,k)$ besteht aus den ersten $1 - 1$ Spalten der Matrix $B(1,k)$; ferner ist die 1 -te Spalte gegeben durch den Vektor

$(\rho_{k+1}, \dots, \rho_{k+1})'$. Somit wird im Falle eines ARMA(k,0)-Prozesses ϕ_{kk} mit Hilfe der Cramerschen Regel bestimmt.

Gehört die Zeitreihe $\{X_t\}$ einem ARMA(p,q)-Prozeß, so erkennt man, daß die SACF die ersten q Yule-Walker-Gleichungen nicht erfüllt, während alle folgenden Yule-Walker-Gleichungen erfüllt sind. Dies führt zu der nachstehenden Definition der GPACF:

$$(2.2.3) \quad \phi_{kk}^{(j)} = \begin{cases} \frac{\rho_{j+1}}{\rho_j} & , k = 1 \\ \frac{\det(A(k,j))}{\det(B(k,j))} & , k > 1 \end{cases}$$

Hierzu bemerken Woodward & Gray (1981, S. 580): "Thus $\phi_{kk}^{(j)}$ is the Cramer's Rule solution for the last autoregressive coefficient using the $(j + 1)$ st through $(j + k)$ th Yule Walker equations of order k . That is, $\phi_{kk}^{(j)}$ is the last autoregressive coefficient if it is assumed that the process is ARMA(k, j). In particular, if X_t is ARMA(p, q), then $\phi_{pp}^{(q)} = \phi_p$. Also, if X_t is ARMA(p, q), then $\phi_{kk}^{(q)}$ is nonzero for $k = p$ and identically zero for $k > p$."

Es ist jedoch anzumerken, daß die Werte $\phi_{kk}^{(j)}$ der GPACF im Gegensatz zur PACF nicht notwendigerweise betragsmäßig kleiner als eins sind. In einer vergleichenden Betrachtung mit ihrem ESACF-Ansatz zur Modellidentifikation bemerken Tsay & Tiao (1984, S. 95f): "Consequently, it reduces the practical usefulness of the GPACF. Second, based on our simulation experience, the consistency property of the sample GPACF is much less than that of the ESACF. Finally, it is hard to interpret the GPACF in the nonstationary case, especially when nonstationary factors have multiplicities greater than one."

Ein rekursives Verfahren zur Identifikation der Parameter p und q geben Hannan & Rissanen (1982). Sie schätzen für unterschiedliche Kombinationen p, q die Parameter ϕ_i bzw. θ_j des entsprechenden ARMA(p, q)-Modells und ermitteln anschließend die Varianz der diesem Modell entsprechenden Fehlerterme $\hat{\sigma}_{p,q}^2$. Es werden nunmehr die Modellparameter p und q bestimmt, indem in Abhängigkeit von p und q die Größe

$$(2.2.4) \quad \log(\hat{\sigma}_{p,q}^2) + (p + q) \cdot \frac{\log(T)}{T}$$

minimiert wird.

Abgesehen von der Tatsache, daß dieses Vorgehen nur auf stationäre Zeitreihen angewendet werden kann, ist jedoch anzumerken, daß die Gefahr des "overfitting", d.h. die Wahl eines zu hohen Wertes für p und/oder q , gegeben ist; denn auch wenn die Zeitreihe einem ARMA(p, q)-Modell gehorcht, kann beispielsweise die Hinzunahme von $y_{t-(p+1)}$ zu einer so starken Verringerung der Varianz der Fehlerterme führen, daß

$$\log(\hat{\sigma}_{p+1,q}^2) + (p+1+q) \cdot \frac{\log(T)}{T} < \log(\hat{\sigma}_{p,q}^2) + (p+q) \cdot \frac{\log(T)}{T}$$

ist, d.h. das ARMA(p+1,q)-Modell wird dem korrekten ARMA(p,q)-Prozeß vorgezogen.

Eine weitere Methode zur Identifikation von ARMA(p,q)-Modellen haben Graupe, Krause & Moore (1975) vorgestellt. Sie stellen die Zeitreihe in der sogenannten π -Gewicht-Form dar (vgl. Box & Jenkins, 1970, S. 48), d.h. sie gehen von einem unendlichen AR-Modell aus. Hierbei lautet die π -Gewicht-Form eines ARMA-Modells

$$(2.2.5) \quad a_t = \theta^{-1}(B) \cdot \phi(B) \cdot (y_t - \bar{y}) = \pi(B) \cdot (y_t - \bar{y}) \quad ,$$

d.h. es ist $\pi(B)$ ein unendliches Polynom in B, falls $q \geq 1$ ist. Es wird dann eine $(q \times q)$ -Matrix A gebildet, die in der i-ten Zeile die Elemente $(\pi_{p-1+i} \ \pi_{p-2+i} \ \dots \ \pi_{p-q+i})$ stehen hat. Im folgenden werden Aussagen über den Rang bzw. die Determinante dieser Matrix getroffen, die zutreffen, wenn p und q korrekt gewählt werden. Auf die angesprochene Vorgehensweise soll im folgenden jedoch nicht näher eingegangen werden, da sie nur angewendet werden kann, wenn man die restriktive Annahme $p \geq q$ trifft.

Wie bereits in Abschnitt 2.1 erwähnt, "ist die Identifikation von niedriggradigen AR- oder MA-Modellen meist relativ einfach. Schwieriger ist die Identifikation des Modells bei Vorliegen gemischter oder ARMA-Modelle. Hierfür wurde kürzlich von Tsay u. Tiao (1984) eine Methode vorgeschlagen, die dieses Problem weitgehend lösen soll. Bei der 'Extended Sample Autocorrelation Function' (ESACF) werden mit Hilfe eines iterativen Regressionsverfahrens konsistente Schätzungen der autoregressiven Parameter vorgenommen, auf deren Basis die ESACF bestimmt wird und zur Determination des 'besten' Modells für stationäre und nichtstationäre ARMA-Modelle herangezogen wird." (Strauß & Stemmler, 1985, S. 146)

Tsay & Tiao (1984) bestimmen zuerst analog zum Vorgehen von Box & Jenkins (1970) die Autokorrelationsfunktion $r_{j(0)}$ der Originaldaten für die Lags $j = 1, \dots, J^*$, wobei J^* so gewählt

werden sollte, daß ein höherer MA-Anteil q als äußerst unwahrscheinlich angesehen werden kann. Gilt nunmehr für ein $q < J^*$ $r_j(0) \neq 0$ für $j \leq q$ und $r_j(0) = 0$ für $j > q$, so kann davon ausgegangen werden, daß die Zeitreihe einem $ARMA(0,q)$ -Modell gehorcht. Ist hingegen $r_j(0)$ für alle j signifikant verschieden von Null, so läßt sich die Zeitreihe nicht mit Hilfe eines reinen MA-Modells beschreiben. Es wird daher im zweiten Schritt angenommen, daß die Zeitreihe $\{y_t\}$ einem $ARMA(1,q)$ -Prozeß gehorcht. Unter dieser Annahme wird daher ein autoregressiver Parameter $\phi_1(1)$ an Hand der vorliegenden Daten geschätzt und es wird die transformierte Zeitreihe

$$(2.2.6) \quad w_{1,t}^{(j)} = y_t - \bar{y} - \phi_1(1)(y_{t-1} - \bar{y})$$

gebildet. Gehorchen nunmehr die y_t einem $ARMA(1,q)$ -Prozeß, so bedeutet dies, daß die transformierten Daten $w_{1,t}^{(j)}$ sich mit Hilfe eines reinen $ARMA(0,q)$ -Modells beschreiben lassen. Daher wird als erste verallgemeinerte Autokorrelationsfunktion der y_t die SACF der transformierten Daten $w_{1,t}^{(j)}$ definiert, d.h. es gilt:

$$(2.2.7) \quad r_j(1) = r_j(w_{1,t}^{(j)})$$

Für ein $ARMA(1,q)$ -Modell ergibt sich unmittelbar:

$$(2.2.8) \quad \begin{aligned} r_j(1) &= 0 & \text{für } j > q & \text{ und } p = 1 \\ r_j(1) &\neq 0 & \text{für } j \leq q & \text{ und } p = 1 \end{aligned}$$

Ist hingegen $r_j(1) \neq 0$ für alle betrachteten Lags, so muß davon ausgegangen werden, daß für die Beschreibung der Zeitreihe $\{y_t\}$ ein höherer autoregressiver Anteil erforderlich ist. Somit sind weitere transformierte Zeitreihen $w_{k,t}^{(j)}$ zu bilden und die zugehörigen ESACF's zu untersuchen. Hierbei ist die k -te ESACF gegeben durch

$$(2.2.9) \quad r_j(k) = r_j(w_{k,t}^{(j)})$$

wobei $w_{k,t}^{(j)} = y_t - \bar{y} - \sum_{i=1}^k \hat{\phi}_{i(k)}(y_{t-i} - \bar{y})$ gilt.

Man erkennt, daß wenn die y_t einem ARMA(p,q)-Modell gehorchen, die Zeitreihe $\{w_{p,t}^{(j)}\}$ asymptotisch einem ARMA(0,q)-Prozeß gehorcht, d.h. es gilt:

$$(2.2.10) \quad \begin{array}{ll} r_j(k) = 0 & \text{für } j > q \quad \text{und } k = p \\ r_j(k) \neq 0 & \text{für } j \leq q \quad \text{und } k = p \end{array}$$

"..., we see that the pth ESACF of an ARMA(p,q)-process has exactly the same 'cutting-off' property as that of the ordinary SACF of a pure MA-process. Moreover, since each individual element of the ESACF is a sample autocorrelation of a transformed series, its sampling properties can be obtained from the known asymptotic results of the SACF. However, except for $k = 0$ the ESACF is not the SACF of any one transformed series of Z_t ." (Tsay & Tiao, 1984, S. 86)

Sind p und q bestimmt worden, so bedeutet dies, daß $r_{q+1}(p)$ insignifikant ist. Hingegen ist $r_{q+1}(p+1)$ signifikant, da eine nicht vorhandene Abhängigkeitsstruktur der Daten angenommen wird.

Die geschilderte Vorgehensweise hat den großen Vorteil, daß man bei der Modellidentifikation von beliebigen ARMA(p,q)-Prozessen lediglich auf die Analyse von Autokorrelationsfunktionen angewiesen ist, die bei Wahl des der Zeitreihe entsprechenden p nach dem Lag q abbrechen und nicht im Falle von gemischten ARMA(p,q)-Prozessen wie die SACF eine unendliche Ausdehnung haben. "A useful property of the ESACF for model identification is that the pth ESACF of an ARMA(p,q) model, stationary or not, has exactly the same asymptotic 'cutting-off' property as that of the ordinary SACF of an MA(q) model. In applications, one can simply search from the Esacf table for this cutting-off feature to specify the order (p,q) of a time series model." (Tsay, 1984, S. 121)

Tsay & Tiao (1984) verweisen jedoch auf das Problem des "overfitting" und zeigen, daß ein zu hoch angesetztes $k (=p)$, d.h. es ist $k - p > 0$, auch zu einer Zunahme der Ordnung q des MA-Anteils der transformierten Serie $\{w_{k,t}^{(j)}\}$ führt, und daß die Anzahl der zusätzlichen autoregressiven und MA-Terme durch $\min\{k-p, j-q\}$ gegeben ist. Für die ESACF wird gezeigt, daß

$$(2.2.11) \quad \begin{aligned} r_j(k) &= c(k-p, j-q) && \text{für } 0 \leq j - q \leq k - p \\ r_j(k) &= 0 && \text{für } j - q > k - p \leq 0 \end{aligned}$$

gilt, wobei $c(k-p, j-q)$ im diskreten Fall eine Konstante ungleich Null ist.

Bei der Vorgehensweise von Tsay & Tiao (1984) ist es im Gegensatz zu anderen Ansätzen der Modellidentifikation nicht erforderlich, eine stationäre oder durch Differenzenbildung a priori stationär gemachte Zeitreihe zu betrachten, denn es wird von einem ARMA(pd,q)-Modell der Form

$$(2.2.12) \quad \Pi(B)(y_t - \bar{y}) = \theta(B)a_t$$

ausgegangen, wobei a_t ein "white-noise"-Prozeß ist und

$$(2.2.13) \quad \Pi(B) = 1 - \Pi_1 B - \Pi_2 B^2 - \dots - \Pi_{pd} B^{pd} = U(B) \cdot \phi(B)$$

mit

$$(2.2.14) \quad U(B) = 1 - U_1 B - U_2 B^2 - \dots - U_d B^d$$

gilt, d.h. es ist $pd = p + d$.

Die Polynome in B in (2.2.13) sind so beschaffen, daß die d Lösungen von $U(B) = 0$ auf dem Einheitskreis und die p Lösungen von $\phi(B) = 0$ außerhalb des Einheitskreises liegen. Wählt man speziell

$$(2.2.15) \quad U(B) = \sum_{j=0}^d (-1)^j \binom{d}{j} B^j = (1 - B)^d, \quad ,$$

so erhält man das ARIMA(p,d,q)-Modell von Box & Jenkins (1970) mit $p = pd - d$ bzw. $d = pd - p$.

Gehorchen die y_t einem stationären ARMA(pd,q)-Modell, d.h. es ist $d = 0$, so haben Mann & Wald (1943) gezeigt, daß die Parameterschätzungen $\hat{\Pi}_1$ konsistent sind, d.h. in Wahrscheinlichkeit gegen die wahren Parameterwerte Π_1 konvergieren. Eine analoge Aussage haben Tiao & Tsay (1983) für den Fall getroffen, daß das ARMA(pd,q)-Modell nicht stationär ist.

An Hand der vorliegenden Parameterschätzungen $\hat{\Pi}_1$ müssen nunmehr jedoch Aussagen über die tatsächliche Struktur des zugrundeliegenden Zeitreihenmodells getroffen werden. Ist beispielsweise ein ARMA(2,q)-Modell identifiziert worden, so muß auf Grund der Parameterschätzungen $\hat{\Pi}_1$ und $\hat{\Pi}_2$ entschieden werden, ob der Zeitreihe ein ARIMA(2,0,q)-, ein ARIMA(1,1,q)- oder aber ein ARIMA(0,2,q)-Modell zugrundeliegt. Da im folgenden Kapitel jedoch ein sequentielles statistisches Testverfahren zur Bestimmung des Differenzengrades an Hand der Originaldaten hergeleitet wird, soll der Ansatz von Tsay & Tiao (1984) im weiteren lediglich zur Bestimmung der Ordnungen einer stationären Zeitreihe verwendet werden.

Somit läßt sich mit Hilfe der SACF die Ordnung eines ARMA(p,q)-Modells ermitteln, wenn man entscheiden kann, ob die geschätzten Autokorrelationen r_k sich für das betrachtete k signifikant von Null unterscheiden. Hierzu ist anzumerken, daß bei genügend vielen Daten die einzelnen geschätzten Autokorrelationen der SACF normalverteilt sind, wobei die Parameter der Verteilung jeweils von dem zugrundeliegenden stochastischen Prozeß abhängen (vgl. R.L. Anderson, 1942). So sind z.B. die Autokorrelationen für einen "white-noise"-Prozeß normalverteilt mit dem Erwartungswert Null und der Varianz $1/T$, wenn T Daten vorliegen. T.W. Anderson (1971) geht auf diese Verteilungsprobleme ausführlich ein.

Liegen für allgemeine stationäre stochastische Prozesse T' Daten vor, so errechnet sich die Varianz der Autokorrelationen nach der Näherungsformel von Bartlett (1946):

$$(2.2.16) \quad \sigma_{r_k}^2 = \frac{1}{T} \cdot (1 + 2 \cdot \sum_{j=1}^{k-1} r_j^2)$$

(vgl. O.D. Anderson, 1976; Nelson, 1973).

Ist für die u.U. logarithmisch transformierten Originaldaten y_t ein ARMA(p,q)-Modell gefittet worden, so lassen sich an Hand der $TD = T - d - D \cdot s$ vorliegenden Daten z_t , wobei

$z_t = (1 - B)^d \cdot (1 - B^s)^D \cdot (y_t - \bar{y})$ gilt, $TD - p$ Residuen

$$(2.2.17) \quad \hat{\varepsilon}_t = z_t - \hat{\phi}_1 z_{t-1} - \dots - \hat{\phi}_p z_{t-p} + \hat{\theta}_1 \hat{\varepsilon}_{t-1} + \dots + \hat{\theta}_q \hat{\varepsilon}_{t-q}$$

ermitteln, wobei $\varepsilon_{t-i} = 0$ gilt, falls $t - i \leq 0$ ist.

Unter Verwendung der $\hat{\varepsilon}_t$ läßt sich die für die Identifikation von p und q dargestellte ESACF-Methode auf die Bestimmung von P und Q übertragen, indem man eine "periodische" ESACF zur Hilfe nimmt. Bricht die periodische SACF der Residuen ε_t nach dem Lag $Q \cdot s$ ab, so ist von einem saisonalen ARMA(0,Q)_s-Modell auszugehen. Ist hingegen die periodische SACF für alle betrachteten Lags $k \cdot s$ signifikant verschieden von Null, so muß von einem saisonalen ARMA(1,Q)_s-Modell ausgegangen werden. Hierbei kann analog zu der vorstehend beschriebenen Identifikation des nichtsaisonalen ARMA(p,q)-Modells davon ausgegangen werden, daß $Q \leq J^*$ gilt. Für die weitere Analyse muß ein saisonaler AR-Parameter $\hat{\phi}_s(1)$ geschätzt und die transformierte Zeitreihe

$$(2.2.18) \quad ws_{s,t}^{(j)} = \hat{\varepsilon}_t - \hat{\phi}_s(1) \hat{\varepsilon}_{t-s}$$

bestimmt werden. Liegt den Residuen ein ARMA(1,Q)_s-Modell zugrunde, so bricht die erste periodische ESACF, d.h. die periodische SACF der $ws_{s,t}^{(j)}$, nach dem Lag $Q \cdot s$ ab. Ist dies nicht der Fall, so ist von einem höheren autoregressiven Anteil im saisonalen ARMA-Prozeß auszugehen und man hat die skizzierte Vorgehensweise in Analogie zur Modellidentifikation des nichtsaisonalen Prozesses so oft zu wiederholen, bis man für eine transformierte Zeitreihe der Form

$$(2.2.19) \quad w_{P_S, t}^{(j)} = \hat{\varepsilon}_t - \sum_{i=1}^P \hat{\phi}_{is}(P) \hat{\varepsilon}_{t-is}$$

eine periodische SACF erhält, die nach dem Lag $Q \cdot s$ abbricht.

Ist $p > 0$ und/oder $P > 0$, so sind bei Verwendung der ESACF-Methode bereits während der Identifikationsphase Parameter $\phi_{i(k)}$ bzw. $\phi_{is(k)}$ zu schätzen. Darüberhinaus müssen nach der Identifikation des nichtsaisonalen ARMA(p,q)-Modells die Parameter θ_j ($j = 1, \dots, q$) und bei Vorliegen eines saisonalen Patterns nach Abschluß der Identifikationsphase die Parameter θ_{ls} ($l = 1, \dots, Q$) bestimmt werden.

2.3 Die Schätzung der Parameter eines ARMA-Modells

Anfangsschätzungen für die Parameter $\phi_1(k), \dots, \phi_k(k)$ eines ARMA(k,0)-Prozesses werden über die Yule-Walker-Gleichungen bestimmt:

$$(2.3.1) \quad R \cdot \underline{\phi} = \underline{r}$$

Hierbei enthält die $(k \times k)$ -Matrix R die geschätzten Autokorrelationen r_i und es gilt $\underline{r}' = (r_1, \dots, r_k)$ sowie $\underline{\phi}' = (\phi_1, \dots, \phi_k)$.

Da ein ARMA(k,0)-Prozeß ein lineares Modell ist, liefert das OLS-Verfahren das Minimum der Fehlerquadratsumme $S(\underline{\phi})$ mit

$$(2.3.2) \quad S(\underline{\phi}) = \sum_{t=1}^T a_t^2(\underline{\phi})$$

Ein wesentliches Problem bei dem OLS-Verfahren liegt darin, daß man bei der Schätzung k Werte verliert, was u.U. bei kurzen Zeitreihen von Nachteil sein kann. Ein ARMA(k,0)-Prozeß läßt sich mit Hilfe der üblichen Regressionsgleichung darstellen:

$$(2.3.3) \quad \underline{z} = Z \cdot \underline{\phi} + \underline{a}$$

Hierbei sind $\underline{z}' = (z_{k+1} - \bar{z}, \dots, z_T - \bar{z})$ und $\underline{a}' = (a_{k+1}, \dots, a_T)$ $(T-k \times 1)$ -Vektoren und für die $(T-k \times k)$ -Matrix Z gilt:

$$(2.3.4) \quad Z = \begin{bmatrix} z_k & -\bar{z} & z_{k-1} & -\bar{z} & \dots & z_1 & -\bar{z} \\ z_{k+1} & -\bar{z} & z_k & -\bar{z} & \dots & z_2 & -\bar{z} \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ z_{T-1} & -\bar{z} & z_{T-2} & -\bar{z} & \dots & z_{T-k} & -\bar{z} \end{bmatrix}$$

Schätzungen für $\phi_1, \dots, \phi_k$ erhält man nunmehr wie folgt:

$$(2.3.5) \quad \underline{\hat{\phi}} = (Z'Z)^{-1} Z' \cdot \underline{z}$$

Hierbei sind die Diagonalelemente aus

$$(2.3.6) \quad (Z'Z)^{-1} \cdot \hat{\sigma}_a^2$$

die Schätzungen der Varianzen der Parameter, wobei

$$(2.3.7) \quad \hat{\sigma}_a^2 = S(\underline{\hat{\phi}})/T$$

gilt.

Die vorstehenden Ergebnisse ergeben sich aus dem linearen Regressionsmodell, das u.a. bei Beyer, Hackel, v. Pieper & Tiedje (1976), Hibbs (1977) und Yamane (1976) ausführlich behandelt wird.

Ist ein ARMA(p,q)-Prozeß mit $q > 0$ identifiziert worden, so lassen sich Anfangsschätzungen nicht mit Hilfe von linearen Gleichungen der Form (2.3.1) ermitteln, sondern es wird die Anwendung von Iterationsverfahren erforderlich (vgl. Box & Jenkins, 1970).

Da der MA(q)-Prozeß nichtlinear ist, können die q Parameter $\theta_1, \dots, \theta_q$ nicht mit Hilfe des OLS-Verfahrens geschätzt werden, sondern es wird das sogenannte NLS-Verfahren ("non linear least

squares") benutzt. Liegt ein ARMA(p,q)-Modell vor, so müssen lineare und nichtlineare Parameter simultan geschätzt werden. Da jedoch das OLS-Verfahren praktisch ein Spezialfall des NLS-Verfahrens ist, werden die p + q Parameter mit dem NLS-Verfahren geschätzt. Bei Draper & Smith (1966) wird das NLS-Verfahren näher diskutiert.

Eine weitere Möglichkeit zur Parameterschätzung, die einem statistische Aussagen über die Schätzungen, wie Signifikanz, Varianz und Effizienz, ermöglicht, bietet die auf R.A. Fisher zurückgehende Maximum-Likelihood- (ML-) Methode, die jedoch eine Verteilungsform für die Residuen voraussetzt.

Für die Likelihood-Funktion der unbekannten Parameter ϕ , θ und σ_a^2 eines ARMA(p,q)-Prozesses gilt (vgl. Ansley, 1979; Dent, 1977; Newbold, 1974):

$$(2.3.8) \quad L(\phi, \theta, \sigma_a^2) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi \cdot \sigma_a^2})^T} \cdot \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_a^2} \cdot \sum_{t=1}^T \hat{a}_t^2(\phi, \theta)\right\}$$

Das ML-Prinzip verlangt nun Schätzwerte für ϕ , θ und σ_a^2 zu suchen, die (2.3.8) für die gegebenen Daten maximieren. Die ML-Schätzer sind konsistent, effizient und wenigstens asymptotisch erwartungstreu. Außerdem sind sie asymptotisch normalverteilt, d.h. für $T \rightarrow \infty$ unterliegen sie einer Normalverteilung. Das ML-Prinzip ist z.B. bei Beck & Arnold (1977), Hays (1974) und Maibaum (1976) ausführlich abgehandelt.

Liegt der Zeitreihe ein saisonales Pattern zugrunde, so erfolgt die Schätzung der p + q + P + Q Parameter ϕ , θ , ϕ und θ des multiplikativen Modells entweder mit Hilfe des ML-Verfahrens oder über das NLS-Verfahren (vgl. Box & Jenkins, 1970; Nelson, 1973).

Die bisher angesprochenen Parameterschätzverfahren gehen von einem festen a priori festgelegten Stichprobenumfang T aus und die zu schätzenden Parameter werden nur ein einziges Mal mit Hilfe der T vorliegenden Daten bestimmt. Darüberhinaus existieren jedoch auch sequentielle Verfahren für die Parameterschätzung, bei denen die Parameter nicht fix sind, sondern sich nach jedem Beobachtungszeitpunkt verändern können. Solche sequentiell-

len Schätzverfahren werden z.B. ausführlich bei Govindarajulu (1975) und Theuerkauf (1981) behandelt. Ein solches sequentielles Verfahren ist beispielsweise der sogenannte adaptive Filteralgorithmus, dessen mathematische Begründung ausführlich bei Widrow (1966) abgehandelt ist. Der adaptive Filteralgorithmus, auf den hier nicht näher eingegangen werden soll, sowie dessen Anwendung auf ARMA-Modelle, wird u.a. bei Makridakis & Wheelwright (1978a,b) und bei Laster (1978) umfassend dargestellt.

2.4 Modelldiagnostik

Nachdem nun das Modell identifiziert ist und die Parameter geschätzt sind, wird die Adäquatheit des stochastischen Modells getestet. Für die "Richtigkeit" eines Modells spricht vor allem, daß die Residuen a_t des Modells einen "white-noise"-Prozeß darstellen, denn nur bei Vorliegen eines solchen Prozesses können statistisch korrekte Aussagen über eventuelle Veränderungen in einer Zeitreihe getroffen werden.

Um zu überprüfen, ob die gesamte SACF nicht signifikant von der SACF eines "white-noise"-Prozesses abweicht, haben Box & Pierce (1970) den sogenannten Portemanteau-Test entwickelt:

$$(2.4.1) \quad G = n \cdot \sum_{i=1}^m r_i^2(\hat{a})$$

Die Prüfgröße G ist näherungsweise χ^2_{df} -verteilt mit df Freiheitsgraden, wobei $df = m - p - q - P - Q$ ist und m die Anzahl der aufsummierten quadrierten Autokorrelationskoeffizienten angibt; ferner gilt $n = T - d - D \cdot s$.

Ist der berechnete Wert G kleiner als der Tabellenwert für χ^2_{df} , so sind die Autokorrelationskoeffizienten nicht signifikant verschieden von Null. Die Residuen sind somit zufällig verteilt und das stochastische Modell ist adäquat. Verschiedene Autoren empfehlen, für m den Wert 20 - 30 zu wählen, da G sehr sensitiv von m abhängt (s.a. Box & Jenkins, 1970, S. 291). Darüberhinaus haben Davies, Triggs & Newbold (1977) aufgezeigt, daß die wahre

Signifikanzgrenze für die Prüfgröße G in (2.4.1) insbesondere dann erheblich von dem tabellarischen Wert der χ^2 -Statistik abweichen kann, wenn kein großer Stichprobenumfang vorliegt.

Eine modifizierte Form des Portemanteau-Tests, die nach Auffassung vieler Autoren jedoch stabiler ist, haben Ljung & Box (1978) entwickelt:

$$(2.4.2) \quad \tilde{G} = n \cdot (n + 2) \cdot \sum_{i=1}^m \frac{1}{n-i} \cdot r_i^2(\hat{a})$$

So weisen Davies & Newbold (1979) im Rahmen einer Simulationsstudie darauf hin, daß der Prüfgröße (2.4.2) eine Verteilung zugrundeliegt, die der χ^2 -Verteilung sehr viel näher kommt, als die Verteilung der dem Portemanteau-Test (2.4.1) zugrundeliegenden Prüfgröße G .

Zur Unterscheidung bezeichnet Keeser (1979) in seiner Arbeit (2.4.1) als Portemanteau-Test I und (2.4.2) als Portemanteau-Test II.

3. Identifikation von univariaten und multiplikativen ARIMA-Modellen mit Hilfe sequentieller Testverfahren

Im vorigen Kapitel wurden die von Box & Jenkins (1970) entwickelten ARIMA-Modelle skizziert. Hierbei wurde deutlich, daß die Bestimmung solcher Prozesse und hierbei insbesondere die Identifikationsphase auf rein heuristischen Vorgehensweisen, wie z.B. der visuellen Betrachtung der Daten sowie der Autokorrelationsfunktionen, beruht. Somit können beispielsweise keinerlei statistische Aussagen über die Modellparameter eines $ARIMA(p,d,q) \times (P,D,Q)_s$ -Modells getroffen werden; darüberhinaus ist auch für die Identifikation eines univariaten $ARIMA(p,d,q)$ -Prozesses bereits eine Vielzahl von Daten erforderlich (s.a. Box & Jenkins, 1970; Keeser, 1979).

Im folgenden Kapitel sollen nunmehr auf der Basis der Sequenzanalyse statistisch abgesicherte Testverfahren für die Ermittlung der Modellparameter und für die Überprüfung des gefitteten Modells auf Adäquatheit hergeleitet werden. Zu diesem Zweck soll zunächst der Unterschied zwischen klassischen und sequentiellen Testverfahren aufgezeigt werden, da die Sequenzanalyse in jüngerer Zeit nur verhältnismäßig wenig Anwendung gefunden hat.

3.1 Klassische und sequentielle Testverfahren

Führt man einen Hypothesentest mit Hilfe klassischer statistischer Verfahren, wie z.B. dem t-Test oder dem F-Test, durch, so ist es in jedem Fall erforderlich, den Stichprobenumfang N a priori festzulegen. Wählt man N zu klein, so läuft man Gefahr, keine statistisch abgesicherten Ergebnisse zu erhalten. Ein zu großer Stichprobenumfang N kann u.U. zu einer erheblichen Verteuerung und/oder zu einer nicht vertretbaren zeitlichen Ausdehnung der Untersuchung beitragen. Die vorgenannten Probleme sind nur zu vermeiden, wenn der Stichprobenumfang N nicht a priori festgelegt werden muß. Eine Möglichkeit hierfür bietet die im 2. Weltkrieg von A. Wald entwickelte Sequenzanalyse. Sie ist ein Entscheidungsverfahren, das zur kontinuierlichen Qualitätsüberwachung in Industriebetrieben eingesetzt wurde.

Bei der sequentiellen Analyse werden die Beobachtungen in zeitlicher Folge (sequentiell) im Umfang N erhoben, der ausreicht, eine gesicherte statistische Entscheidung zu fällen. Damit wird der Stichprobenumfang N zu einer Zufallsvariablen; d.h. es brauchen nur so viele Daten erhoben zu werden, wie "unbedingt erforderlich" sind. Dies bedeutet nicht, daß sequentielle Testverfahren den klassischen Verfahren stets überlegen sind. So wird in manchen Fällen gegen ein solches Verfahren sprechen, daß die Anzahl der durchzuführenden Beobachtungen zufallsabhängig ist. Sequentielle Verfahren sind in der Regel dann von Vorteil, wenn die Einzelbeobachtung zeitraubend und/oder kostspielig ist (vgl. hierzu Ghosh, 1970).

Bei herkömmlichen (nichtsequentiellen) Testverfahren kann in der Regel vor der Stichprobenerhebung nur die Wahrscheinlichkeit α , die Nullhypothese H_0 abzulehnen, obwohl sie wahr ist (α -Fehler), nicht jedoch die Wahrscheinlichkeit β , die Nullhypothese beizubehalten, obwohl sie falsch ist (β -Fehler), festgelegt werden. Die Sequenzanalyse eröffnet einem hingegen die Möglichkeit, sowohl α als auch β a priori vorzugeben; $\alpha + \beta < 1$ ist dann das Gesamtrisiko einer falschen Entscheidung durch den Sequentialtest.

Es stellt sich nunmehr die Frage, welche der vorgenannten Fehlentscheidungen von größerer Bedeutung ist. Beispielsweise werde im Zusammenhang mit dem Verkauf von Waren von einem Produzenten an einen Großhändler eine Abnahmeprüfung vorgenommen, d.h. man hat die folgenden Hypothesen zu testen:

- (3.1.1) H_0 : Die Lieferung entspricht den Qualitätsanforderungen
 H_1 : Die Lieferung entspricht nicht den qualitativen Anforderungen

Aus der Sicht des Produzenten dürfte die Annahme einer nicht zutreffenden Alternativhypothese H_1 schwerwiegender sein als die Annahme einer nicht zutreffenden Nullhypothese H_0 . Der Hersteller einer Ware wird daher $\alpha < \beta$ wählen, weshalb der Fehler 1. Art auch häufig als das Produzentenrisiko bezeichnet wird. Für den

Konsumenten hingegen hat die Beibehaltung einer nicht zutreffenden Nullhypothese H_0 in der Regel gravierendere Folgen als die Ablehnung einer zutreffenden Nullhypothese H_0 . Der Abnehmer einer Ware wird deshalb $\beta < \alpha$ wählen, weshalb der Fehler 2. Art auch häufig als das Konsumentenrisiko bezeichnet wird. Ist hingegen keine der beiden Möglichkeiten einer Fehlentscheidung dominierend, so sollte man ein Gesamtrisiko $\alpha + \beta$ festlegen und $\alpha = \beta = \frac{\alpha + \beta}{2}$ wählen.

Bei einem klassischen Test kann H_0 nur beibehalten, jedoch nicht angenommen werden, da β nicht a priori festgelegt ist. Im sequentiellen Test wird die Nullhypothese H_0 bei einer Fehlerwahrscheinlichkeit von β stets zu Recht angenommen. Damit verbleibt jedoch zwischen H_0 und H_1 eine Indifferenzzone in Abhängigkeit von α und β , d.h. liefert die Stichprobe ein Ergebnis aus diesem Bereich, so wäre eine Entscheidung zugunsten von H_0 oder H_1 mit einer Fehlerwahrscheinlichkeit behaftet, die echt größer als $\alpha + \beta$ ist. Um zu einer Entscheidung zu gelangen, sind daher weitere Datenerhebungen erforderlich.

Seit den grundlegenden Arbeiten von A. Wald während der vierziger Jahre sind zahlreiche sequentielle statistische Verfahren untersucht worden. Bedenbender (1978) hat einparametrische Schätzprobleme untersucht, für die sich sequentielle Schätzverfahren mit gewissen Optimalitätseigenschaften angeben lassen. Untersucht man sequentielle Schätzprobleme mit mehreren unbekannten Parametern, so kann in der Regel lediglich gezeigt werden, daß sie asymptotisch optimal sind. Entsprechende Untersuchungen findet man u.a. bei Chow & Robbins (1965), Starr (1966) sowie bei Yahav & Bickel (1968).

Der von A. Wald entwickelte sequentielle Test begründet seine Entscheidungen auf dem Wahrscheinlichkeitsverhältnis, weshalb dieser Test auch SPRT ("Sequential Probability Ratio Test") genannt wird. Er soll im folgenden beschrieben werden.

3.2 Der "Sequential Probability Ratio Test" (SPRT)

Es sei X eine Zufallsvariable und $f(x; \underline{\theta})$ die zugehörige Wahrscheinlichkeits- bzw. Dichtefunktion, je nachdem, ob X eine diskrete oder stetige Zufallsvariable ist. Hierbei ist

$\underline{\theta}' = (\theta_1, \dots, \theta_k)$ ein Punkt des k -dimensionalen Parameterraumes P_k , d.h. ein Element derjenigen Teilmenge des $\mathbb{R}^k$, die alle denkbaren Parameterpunkte $\underline{\theta}$ enthält.

Bis auf weiteres soll davon ausgegangen werden, daß voneinander unabhängige Erhebungen x_1 vorliegen. Für die zugehörige Wahrscheinlichkeits- bzw. Dichtefunktion gilt dann im Fall von m Beobachtungen:

$$(3.2.1) \quad f(x_1, \dots, x_m; \underline{\theta}) = \prod_{i=1}^m f(x_i; \underline{\theta})$$

Betrachtet man eine einfache Null- sowie eine einfache Alternativhypothese, d.h. testet man das Hypothesenpaar

$$(3.2.2) \quad \begin{aligned} H_0: \underline{\theta} &= \underline{\theta}_0 \\ H_1: \underline{\theta} &= \underline{\theta}_1 \end{aligned} ,$$

so soll der Test so aufgebaut sein, daß man mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens $(1 - \alpha)$ H_0 annimmt, wenn $\underline{\theta}_0$ der wahre Parameter ist, bzw. mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens $(1 - \beta)$ H_1 annimmt, falls $\underline{\theta}_1$ der wahre Parameter ist.

Die optimale Lösung dieses Problems für klassische Testverfahren mit a priori festgelegtem Stichprobenumfang n haben Neyman & Pearson (1928) gegeben. "They showed that for a given n , the test giving smallest β (that is, the most powerful test) depends on the likelihood ratio l_n , where

$$\begin{aligned} l_n &= \frac{\text{Probability of observed results given } \underline{\theta}_1 \text{ true}}{\text{Probability of observed results given } \underline{\theta}_0 \text{ true}} \\ &= \prod_{i=1}^n \frac{f(x_i, \underline{\theta}_1)}{f(x_i, \underline{\theta}_0)} \end{aligned}$$

and the test decides for or against θ_0 according as l_n is less than or greater than a constant. The value of this constant can be chosen to give the test the correct size α , and in principle n can be chosen to give the test power $(1-\beta)$." (Wetherill, 1975, S. 14f)

Der SPRT von Wald (1947) basiert ebenfalls auf dem Likelihood-Quotienten; es wird jedoch nicht wie bei Neyman & Pearson (1928) von einem fix vorgegebenem n ausgegangen. Liegt eine Stichprobe vom Umfang m vor, so bezeichne

$$(3.2.3) \quad p_{1m} = \prod_{i=1}^m f(x_i; \theta_1)$$

sowie

$$(3.2.4) \quad p_{0m} = \prod_{i=1}^m f(x_i; \theta_0)$$

Es werden nun in Abhängigkeit von α und β zwei positive Konstanten A und B mit $B < A$ ermittelt und mit dem Likelihood-Quotienten p_{1m}/p_{0m} verglichen.

Gilt $p_{1m}/p_{0m} \geq A$, so wird der Test mit der Ablehnung von H_0 beendet; gilt $p_{1m}/p_{0m} \leq B$, so wird die Nullhypothese H_0 angenommen. Ist hingegen $B < p_{1m}/p_{0m} < A$, so kann keine Entscheidung zugunsten von H_0 oder H_1 getroffen werden, sondern es muß eine $(m+1)$ -te Stichprobe gezogen werden, um den Likelihood-Quotienten

$p_{1,m+1}/p_{0,m+1}$ berechnen und mit A bzw. B vergleichen zu können.

Ist wiederum $B < p_{1,m+1}/p_{0,m+1} < A$, so müssen weitere Datenerhebungen folgen, bis schließlich nach der $(m+j)$ -ten Erhebung

$p_{1,m+j}/p_{0,m+j} \leq B$ oder $p_{1,m+j}/p_{0,m+j} \geq A$ gilt.

Betrachtet man eine Stichprobe vom Umfang m , so kann man deren Ergebnis als ein m -tupel reeller Zahlen $\underline{x}_m^1 = (x_1, \dots, x_m)$ auffassen, d.h. der zugehörige Stichprobenraum W_m ist eine Teilmenge des $\mathbb{R}^m$. Sind A und B bekannt, so läßt sich W_m nach E. Weber (1980, S. 349) eindeutig in drei disjunkte Teilmengen R_m^0 , R_m^1 und R_m zerlegen, d.h. es gilt:

$$(3.2.5) \quad W_m = R_m^0 \cup R_m^1 \cup R_m$$

sowie

$$(3.2.6) \quad R_m^0 \cap R_m^1 = R_m^0 \cap R_m = R_m^1 \cap R_m = \emptyset$$

Hierbei bezeichnet

R_m^0 die Menge aller Stichproben $\underline{x}_m \in W_m$, für die H_0 angenommen wird:

$$(3.2.7) \quad R_m^0 = \{ \underline{x}_m \mid p_{1m}/p_{0m} \leq B \} ;$$

R_m^1 die Menge aller Stichproben $\underline{x}_m \in W_m$, für die H_1 angenommen wird:

$$(3.2.8) \quad R_m^1 = \{ \underline{x}_m \mid p_{1m}/p_{0m} \geq A \} ;$$

R_m die Indifferenzzone, d.h. die Menge aller Stichproben $\underline{x}_m \in W_m$, für die keine Entscheidung zugunsten von H_0 oder H_1 getroffen werden kann:

$$(3.2.9) \quad R_m = \{ \underline{x}_m \mid B < p_{1m}/p_{0m} < A \}$$

Ist nach einer Stichprobe vom Umfang m $\underline{x}_m \in R_m$, so muß eine $(m+1)$ -te Beobachtung x_{m+1} erhoben werden. Alle $m+1$ Beobachtungen $(x_1, \dots, x_m, x_{m+1}) = \underline{x}_{m+1}'$ bilden nun ein Element des $(m+1)$ -dimensionalen Stichprobenraumes $W_{m+1} = R_{m+1}^0 \cup R_{m+1}^1 \cup R_{m+1}$.

Ist wiederum $\underline{x}_{m+1} \in R_{m+1}$, so sind weitere Erhebungen erforderlich, bis schließlich nach der $(m+j)$ -ten Erhebung $\underline{x}_{m+j} \in R_{m+j}^0$ oder $\underline{x}_{m+j} \in R_{m+j}^1$ gilt, so daß letztlich H_0 angenommen bzw. verworfen werden kann. Es ist noch darauf hinzuweisen, daß für ein $\underline{x}_m \in W_m$ der für die Entscheidung benötigte Likelihood-Quotient nicht definiert ist, falls $p_{0m} = 0$ gilt. Ist desweiteren $p_{1m} \neq 0$,

so geht man davon aus, daß der Likelihood-Quotient unendlich groß wird, so daß in jedem Fall $\underline{x}_m \in R_m^1$ ist; d.h. die Untersuchung wird mit der Annahme von H_1 abgeschlossen. Ist hingegen $p_{1m} = p_{0m} = 0$, so definiert man $p_{1m}/p_{0m} := 1$. Unter der Annahme der Unabhängigkeit der x_i läßt sich die gemeinsame Dichte- bzw. Wahrscheinlichkeitsfunktion als Produkt darstellen. Um eine rechentechnische Vereinfachung zu erreichen, wird häufig empfohlen (s.a. Fisz, 1978) den Likelihood-Quotienten p_{1m}/p_{0m} zu logarithmieren. Man erhält dann die Gleichung:

$$(3.2.10) \quad \log \frac{p_{1m}}{p_{0m}} = \log \frac{f(x_1; \theta_1)}{f(x_1; \theta_0)} + \dots + \log \frac{f(x_m; \theta_1)}{f(x_m; \theta_0)}$$

Setzt man $z_i = \log \frac{f(x_i; \theta_1)}{f(x_i; \theta_0)}$ und definiert $Z_m := \sum_{i=1}^m z_i$, so wird

in Analogie zu den obigen Ausführungen H_0 verworfen, falls $Z_m \geq \log(A)$ gilt und H_0 beibehalten, falls $Z_m \leq \log(B)$ ist. Im Falle $\log(B) < Z_m < \log(A)$ ist eine zusätzliche Beobachtung erforderlich.

Gegeben sei eine binomialverteilte Zufallsvariable X und es sei p die Wahrscheinlichkeit, daß X den Wert 1 annimmt. Da X nur zwei Ausprägungen hat, ist $1 - p$ dann die Wahrscheinlichkeit, daß X den Wert 0 annimmt. Somit gilt für die Verteilung von X $f(1;p) = p$ sowie $f(0;p) = 1 - p$. Es soll nun für $p_0 \neq p_1$ das Hypothesenpaar

$$(3.2.11) \quad \begin{aligned} H_0: p &= p_0 \\ H_1: p &= p_1 \end{aligned}$$

getestet werden. Nach m Beobachtungen erhält man die Prüfgröße

$$(3.2.12) \quad \frac{p_{1m}}{p_{0m}} = \frac{p_1^k \cdot (1 - p_1)^{m-k}}{p_0^k \cdot (1 - p_0)^{m-k}} = \left(\frac{p_1}{p_0} \right)^k \cdot \left(\frac{1 - p_1}{1 - p_0} \right)^{m-k},$$

wobei $k \leq m$ die Anzahl der beobachteten Einsen kennzeichnet.

Gemäß den oben angeführten Regeln wird nunmehr die Nullhypothese beibehalten, falls

$$(3.2.13) \quad \left\{ \frac{p_1}{p_0} \right\}^k \cdot \left\{ \frac{1 - p_1}{1 - p_0} \right\}^{m-k} \leq B$$

gilt. Ist hingegen

$$(3.2.14) \quad \left\{ \frac{p_1}{p_0} \right\}^k \cdot \left\{ \frac{1 - p_1}{1 - p_0} \right\}^{m-k} \geq A, \quad ,$$

so wird H_0 verworfen. Gilt

$$(3.2.15) \quad B < \left\{ \frac{p_1}{p_0} \right\}^k \cdot \left\{ \frac{1 - p_1}{1 - p_0} \right\}^{m-k} < A, \quad ,$$

so ist eine $(m + 1)$ -te Beobachtung erforderlich. Eine ausführliche Darstellung des SPRT sowie seiner Eigenschaften für binomialverteilte Zufallsvariable findet man u.a. bei Fisz (1978, S. 691ff).

Unter der Annahme der Unabhängigkeit hat Wald (1947) nachgewiesen, daß der SPRT mit Wahrscheinlichkeit 1 nach endlich vielen Schritten zu einer Entscheidung zugunsten von H_0 oder H_1 führt. Da der SPRT mit Sicherheit zu einem Ergebnis kommt, ist demzufolge $1 - \beta$ die Wahrscheinlichkeit, eine korrekte Alternativhypothese H_1 anzunehmen.

Nach den bisherigen Ausführungen stellt sich nunmehr die Frage, wie bei vorgegebenem α und β die für den sequentiellen Test entscheidenden Größen A und B bestimmt werden können. Diese Größen genügen den nachstehenden Ungleichungen (s.a. E. Weber, 1980, S. 356):

$$(3.2.16) \quad A \leq \frac{1 - \beta}{\alpha}$$

bzw.

$$(3.2.17) \quad B \geq \frac{\beta}{1 - \alpha}$$

Somit ist $\frac{1-\beta}{\alpha}$ eine obere Schranke für A und $\frac{\beta}{1-\alpha}$ eine untere Schranke für B.

Wählt man $A = \frac{1-\beta}{\alpha}$ und $B = \frac{\beta}{1-\alpha}$, so sind dies nicht die korrekten Werte für A und B. Wald (1947) weist jedoch nach, daß sich weder der Gesamtfehler $\alpha + \beta$ noch die Beobachtungszahl wesentlich vergrößert, wenn man A und B wie vorstehend festsetzt.

Die Ungleichungen $\frac{\alpha}{1-\beta} \leq \frac{1}{A}$ und $\frac{\beta}{1-\alpha} \leq B$ wurden unter der Annahme der Unabhängigkeit der Beobachtungen hergeleitet. "The assumption of the independence of the observations has been used in showing that the probability is one that the sequential process will eventually terminate. The rest of the derivation, however, remains valid also when the successive observations are dependent, i.e., when the conditional distribution of the i th observation x_i is affected by the outcome of the preceding observations $x_1, \dots, x_{i-1}$." (Wald, 1947, S. 43)

Bisher wurde lediglich auf die Überprüfung von einfachen Hypothesen eingegangen. Testet man für $\theta_0 < \theta_1$ die zusammengesetzten Hypothesen

$$(3.2.18) \quad \begin{aligned} H &: \theta \leq \theta_0 \\ \bar{H} &: \theta \geq \theta_1 \end{aligned} ,$$

so kann dies bei Anwendung des Wald'schen Verfahrens auf die Überprüfung der einfachen Hypothesen

$$(3.2.19) \quad \begin{aligned} H_0 &: \theta = \theta_0 \\ H_1 &: \theta = \theta_1 \end{aligned}$$

zurückgeführt werden. Die Wahrscheinlichkeit, eine zutreffende Nullhypothese H_0 anzunehmen, beträgt $1 - \alpha$. Ist das wahre $\theta < \theta_0$,

so gehört dieser Wert erst recht zum Annahmebereich von H_0 , da $\theta_0 < \theta_1$ gilt. Somit ist die Wahrscheinlichkeit, eine zutreffende Nullhypothese H für ein $\theta < \theta_0$ anzunehmen, echt größer als $1 - \alpha$. Da der SPRT mit Wahrscheinlichkeit 1 zu einer Entscheidung zugunsten von H_0 oder H_1 kommt, ist $1 - \beta$ die Wahrscheinlichkeit, eine korrekte Alternativhypothese H_1 anzunehmen. Da alle $\theta > \theta_1$ im Ablehnungsbereich von H_0 liegen, ist somit die Wahrscheinlichkeit, eine zutreffende Alternativhypothese $\bar{H}$ für ein $\theta > \theta_1$ anzunehmen, echt größer als $1 - \beta$. Somit genügt es, die Hypothesen H_0 und H_1 zu testen, um eine Entscheidung zugunsten von H oder $\bar{H}$ treffen zu können.

Wie die bisherigen Ausführungen zeigen, werden bei sequentiellen Tests so lange Daten erhoben, bis für vorgegebenes α und β eine Entscheidung zugunsten von H_0 oder H_1 möglich ist. Daher werden sequentielle Tests in der Literatur auch häufig als Folgetests bezeichnet. Die bisher beschriebene Vorgehensweise ist ein rein rechnerisches Verfahren. Darüberhinaus existieren für Folgetestpläne graphische Verfahren, die sich insbesondere als Schnelltests eignen. Zahlreiche Beispiele hierzu, insbesondere aus den Bereichen Medizin und Biologie, findet man bei Sachs (1978, S. 178ff) sowie bei E. Weber (1980).

In den nächsten Abschnitten wird der SPRT für die Identifikation von $ARIMA(p,d,q) \times (P,D,Q)_s$ -Modellen angewendet.

3.3 Überprüfung auf Varianzhomogenität sowie Ermittlung der Modellparameter d und D

Im folgenden sollen auf der Basis des SPRT statistische Testverfahren zur Überprüfung der Rohdaten auf Varianzhomogenität und zur Bestimmung sowohl des nichtsaisonalen Differenzengrades d als auch des saisonalen Differenzengrades D hergeleitet werden. Hierzu muß zunächst aufgezeigt werden, daß der SPRT auch bei einer gruppenweisen Verarbeitung von Daten angewendet werden kann und daß sequentielle Tests auch durchgeführt werden können, wenn für die betrachtete Zufallsvariable keine Verteilungsannahme vorliegt.

3.3.1 Gruppenweise Verarbeitung von Daten unter Verwendung des SPRT

Bei dem in Abschnitt 3.2 dargestellten SPRT wurden sequentiell einzelne Realisierungen x_i einer Zufallsvariablen X beobachtet und es wurde für eine Stichprobe vom Umfang m die Prüfgröße

$$\frac{p_{1m}}{p_{0m}} = \frac{\prod_{i=1}^m f(x_i; \theta_1)}{\prod_{i=1}^m f(x_i; \theta_0)}$$

gebildet, wobei allerdings die Unabhängigkeit der x_i vorausgesetzt werden mußte.

Bei vielen praktischen Anwendungen werden die Daten jedoch nicht einzeln sondern gruppenweise erfaßt. Es soll im folgenden gezeigt werden, daß sich auch in diesem Fall der SPRT anwenden läßt.

Liegen gruppenweise erfaßte Daten vor, so bezeichne $g_i \geq 1$ den Umfang der i -ten Gruppe. Definiert man ferner $g_0 := 0$, so lassen sich die Elemente der i -ten Gruppe mit Hilfe der folgenden Zufallsvariablen $\underline{X}_i$ darstellen:

$$(3.3.1) \quad \underline{X}_i(g_i) = (x_{g_1+\dots+g_{i-1}+1}, \dots, x_{g_1+\dots+g_i})$$

Setzt man $G_i := \sum_{j=1}^i g_j$, so erhält man die äquivalente Darstellung:

$$(3.3.2) \quad \underline{X}_i(g_i) = (x_{G_{i-1}+1}, \dots, x_{G_i})$$

Um einen sequentiellen Test konstruieren zu können, müssen für die erste Gruppe für $1 = 0, 1$ die Größen

$$(3.3.3) \quad f_{G_1}(x_1, \dots, x_{G_1}; \theta_1)$$

sowie für die i -te Gruppe ($i > 1$) die Größen

$$(3.3.4) \quad f_{G_i}(x_1, \dots, x_{G_i}; \theta_0) \cdot f_{G_{i-1}}(x_1, \dots, x_{G_{i-1}}; \theta_1)$$

bzw.

$$(3.3.5) \quad f_{G_i}(x_1, \dots, x_{G_i}; \underline{\theta}_1) \cdot f_{G_{i-1}}(x_1, \dots, x_{G_{i-1}}; \underline{\theta}_0)$$

gebildet werden (vgl. Ghosh, 1970).

Hat man m voneinander unabhängige Gruppen beobachtet, so erhält man in Analogie zu den Ausführungen in Abschnitt 3.2 die Größen

$$(3.3.6) \quad pg_{1m} = f_{G_1}(x_1, \dots, x_{G_1}; \underline{\theta}_1) \cdot \prod_{i=2}^m \{ f_{G_i}(x_1, \dots, x_{G_i}; \underline{\theta}_1) \cdot f_{G_{i-1}}(x_1, \dots, x_{G_{i-1}}; \underline{\theta}_0) \}$$

bzw.

$$(3.3.7) \quad pg_{0m} = f_{G_1}(x_1, \dots, x_{G_1}; \underline{\theta}_0) \cdot \prod_{i=2}^m \{ f_{G_i}(x_1, \dots, x_{G_i}; \underline{\theta}_0) \cdot f_{G_{i-1}}(x_1, \dots, x_{G_{i-1}}; \underline{\theta}_1) \}$$

Nunmehr läßt sich die Testgröße pg_{1m}/pg_{0m} nach den in Abschnitt 3.2 beschriebenen Regeln beurteilen, indem man für vorgegebenes α und β die Größen A und B wie beschrieben bestimmt und mit dem angegebenen Likelihood-Quotienten vergleicht.

Wählt man speziell $g_i = 1$ für alle $i \geq 1$, so erkennt man an Hand der obigen Formeln, daß man als Spezialfall der beschriebenen gruppenweisen Verarbeitung den in Abschnitt 3.2 dargestellten SPRT erhält.

3.3.2 Verteilungsfreie sequentielle Testverfahren

In den bisherigen Ausführungen wurde stets davon ausgegangen, daß die für einen Hypothesentest sequentiell erhobenen Daten einer bestimmten - a priori bekannten - Verteilung $f(X; \underline{\theta}_i)$ mit $i = 0, 1$ genügen und es wurde für die m -te Beobachtung der Likelihood-Quotient p_{1m}/p_{0m} gebildet, um eine Entscheidung gemäß den in Abschnitt 3.2 beschriebenen Regeln treffen zu können.

Ist jedoch auf Grund der Problemstellung eine Annahme über die konkrete Verteilung der betrachteten Zufallsvariablen X nicht gerechtfertigt, so kann dennoch ein Test mit Hilfe der verteilungsfreien oder nichtparametrischen sequentiellen Testverfahren durchgeführt werden. Hierbei lassen sich im wesentlichen zwei Vorgehensweisen unterscheiden. Entweder erfolgt eine Dichotomisierung der betrachteten Zufallsvariablen X , d.h. die Realisierungen x_i von X werden nach bestimmten problemabhängigen Kriterien in 0,1-Variable transformiert, oder es finden die sogenannten Rangtests Anwendung (vgl. Wilcoxon, Rhodes & Bradley, 1963; Bradley, Merchant & Wilcoxon, 1966). Im folgenden sollen lediglich sequentielle Testverfahren für dichotomisierte Zufallsvariable angesprochen werden.

Gegeben sei eine beliebige stetige oder diskrete Zufallsvariable, deren Verteilungsfunktion jedoch nicht näher spezifiziert werden kann. Alle Fragestellungen, bei denen lediglich überprüft werden soll, ob ein gewisser "Erfolg" - der in Abhängigkeit von dem betrachteten Problem vom Anwender genau definiert werden muß - eingetreten ist oder nicht, erlauben eine Dichotomisierung der zugrundeliegenden Zufallsvariablen X . Hierbei wird in der Regel so vorgegangen, daß man einer Realisierung x_i von X eine 1 zuordnet, falls diese Realisierung einem "Erfolg" entspricht und x_i anderenfalls eine 0 zuordnet. Ein Beispiel für einen solchen Test, in dem ein herkömmliches und ein neu eingeführtes Fertigungsverfahren miteinander verglichen werden, findet man bei Wohlzogen & Wohlzogen-Bukovics (1966).

Es sind verteilungsfreie sequentielle Tests entwickelt worden, die es einem ermöglichen, Binär- oder auch Rangdaten bzw. Meßwerte auf Zufallsmäßigkeit und auf Stationarität hin zu überprüfen. Unter der Vielzahl dieser Tests ist nach Lienert (1978) ein von Noether (1956) entwickelter Test der effizienteste, da er auf Abweichungen aller Art anspricht (Omnibus-Sequentialtest) und im Gegensatz zu anderen Testverfahren nicht die Kenntnis des Populationsmedians voraussetzt. Es muß jedoch eine stetige Merkmalsverteilung gegeben sein.

Eine Anwendungsmöglichkeit von Noether's Test ist die Überprüfung auf Zufallsmäßigkeit gegen Trends aller Art. Liegen zufällig gewonnene Meßwerte aus einer stetig verteilten Population vor, so werden jeweils drei aufeinanderfolgende Werte zu einem Terzett zusammengefaßt und es wird zwischen monotonen (z.B. 236 oder 421) und nicht-monotonen (z.B. 341) Terzetten unterschieden. Permutiert man drei Meßwerte $a_1 < a_2 < a_3$, so erhält man die $3! = 6$ Terzette $a_1a_2a_3$, $a_3a_2a_1$, $a_1a_3a_2$, $a_2a_1a_3$, $a_2a_3a_1$ und $a_3a_1a_2$, von denen lediglich die ersten beiden monoton sind. Somit beträgt der zu erwartende Anteil monotoner Terzette $p_0 = 1/3$. Bilden die erhobenen Daten jedoch keine Zufallsreihe oder verändert sich z.B. der Lageparameter der Population, so schlägt sich dies in einem Trend nieder, der den Anteil der monotonen Terzette auf $p_1 > 1/3$ anwachsen läßt. "Eine Ausnahme bildet nur der Fall einer negativen seriellen Korrelation der Meßwerte, in welchem Fall auf einen hohen Meßwert meist ein niedriger folgt et vice versa, so daß der Anteil der monotonen Terzette sinkt. Dieser Fall spielt in der Forschungspraxis jedoch kaum eine Rolle, da sich der Lageparameter in aller Regel nur allmählich (undulierend etwa) und nicht sprunghaft (oszillierend) ändert." (Lienert, 1978, S. 164)

Hat man keine begründete Vermutung über den tatsächlichen Anteil monotoner Terzette p_1 , so wird man in der Regel $p_1 = 1/2$ wählen und die Hypothesen

$$(3.3.8) \quad \begin{array}{l} H_0: p_0 = 1/3 \\ H_1: p_1 = 1/2 \end{array}$$

unter Verwendung der Binomialverteilung wie in Abschnitt 3.2 beschrieben testen.

Eine ausführliche Diskussion verteilungsfreier sequentieller Testverfahren auf der Basis von dichotomisierten Zufallsvariablen findet man bei Lienert (1978, Kap. 12).

3.3.3 Überprüfung auf Varianzhomogenität an Hand der Rohdaten

Am Anfang von Kapitel 2 wurde darauf hingewiesen, daß auf der Basis einer visuellen Betrachtung der Daten zunächst entschieden werden muß, ob die Rohdaten homogen sind oder ob eine Transformation der Zeitreihenwerte erforderlich ist. Im folgenden entwickeln wir ein sequentielles Testverfahren zur Überprüfung der Modellannahme der Varianzhomogenität der Rohdaten; d.h. es ist zu testen, ob $\text{Var}(y_t) = \sigma_y^2$ für alle t gilt.

Somit gilt es für vorgegebenes α und β sequentiell die Hypothesen

$$(3.3.9) \quad \begin{aligned} H_0: \text{Var}(y_t) &= \sigma_y^2 = \text{const. für alle } t \\ H_1: \text{Var}(y_t) &= \sigma_{y_t}^2 \neq \text{const. für mindestens ein } t \end{aligned}$$

zu testen.

Die Hypothesen (3.3.9) lassen sich überprüfen, indem man für voneinander unabhängige (disjunkte) Gruppen vom Umfang G jeweils den Variationskoeffizienten bildet. Hierbei ist der Variationskoeffizient V_k der k -ten Gruppe definiert als die Standardabweichung der Daten der k -ten Gruppe geteilt durch das arithmetische Mittel der Daten der k -ten Gruppe (vgl. Sachs, 1978, S. 64). Da jede Gruppe denselben Umfang G hat, und die Gruppen voneinander unabhängig sind, folgt somit:

$$(3.3.10) \quad V_k = \frac{\sigma_y(k)}{\bar{y}(k)}$$

$$\text{mit } \sigma_y(k) = \sqrt{\frac{1}{G} \cdot \sum_{t=(k-1)G+1}^{k \cdot G} (y_t - \bar{y}(k))^2}$$

$$\text{und } \bar{y}(k) = \frac{1}{G} \cdot \sum_{t=(k-1)G+1}^{k \cdot G} y_t$$

Um vor allem bei der Bildung der Standardabweichungen genügend gesicherte Ergebnisse zu erhalten, sollte in jedem Fall $G \geq 3$

gelten. Auf der anderen Seite empfehlen wir jedoch $G \leq 5$ zu wählen, um für genügend viele disjunkte Gruppen die Variationskoeffizienten V_k bilden zu können.

Die Variationskoeffizienten werden im folgenden selber als Zeitreihe betrachtet. Sind nunmehr die Originaldaten heterogen, so schlägt sich dies in einem Trend in der Zeitreihe $\{V_k\}$ nieder. Stellt hingegen $\{V_k\}$ eine stationäre Zeitreihe ohne Trends jeder Art dar, so ist die Nullhypothese aus (3.3.9) erfüllt, d.h. die Originaldaten sind homogen. Daher läßt sich der in Abschnitt 3.3.2 dargestellte von Noether (1956) entwickelte Omnibus-Sequentialtest gegen Trends aller Art anwenden. Dies geschieht, indem man die Hypothesen

$$(3.3.11) \quad \begin{aligned} H_0: p &= p_0 = 1/3 \\ H_1: p &= p_1 = 1/2 \end{aligned}$$

unter Verwendung der Binomialverteilung wie in Abschnitt 3.2 beschrieben testet, indem man jedem Terzett $V_{3k+1}, V_{3k+2}, V_{3k+3}$ ($k = 0, 1, \dots$) eine eins zuordnet, falls es monoton ist, d.h. falls

$$(3.3.12) \quad V_{3k+1} \leq V_{3k+2} \leq V_{3k+3}$$

oder aber

$$(3.3.13) \quad V_{3k+1} \geq V_{3k+2} \geq V_{3k+3}$$

nicht jedoch

$$(3.3.14) \quad V_{3k+1} = V_{3k+2} = V_{3k+3}$$

gilt, und somit die Alternativhypothese stützt. Ist (3.3.12) bzw. (3.3.13) unter Beachtung von (3.3.14) nicht erfüllt, so wird dem entsprechendem nicht monotonem Terzett eine Null zugeordnet und somit die Nullhypothese gestützt.

Muß die Alternativhypothese aus (3.3.11) und damit ebenfalls die Alternativhypothese aus (3.3.9) beibehalten werden, so läßt sich die Varianzheteroskedastie i.a. durch eine logarithmische Transformation reduzieren (vgl. Abschnitt 2.1).

3.3.4 Bestimmung der Differenzengrade d und D

Ein sequentielles Testverfahren, das wiederum auf Noether's (1956) Omnibus-Sequentialtest aufbaut, geben wir zur Ermittlung von d und D bei sequentiell anfallenden Daten an.

Da, wie in Abschnitt 3.3.2 aufgezeigt wurde, Noether's Test auf Trends aller Art anspricht, ist er auch geeignet, stochastische Trends zu ermitteln. Zu diesem Zweck überprüft man für vorgegebenes α und β wie beschrieben für die sequentiell anfallenden Daten y_t die Hypothesen

$$(3.3.15) \quad \begin{aligned} H_0: d &= 0 \\ H_1: d &> 0 \end{aligned} ,$$

indem man jeweils die aufeinanderfolgenden Daten $y_{3k+1}, y_{3k+2}, y_{3k+3}$ ($k = 0, 1, \dots$) zu einem Terzett zusammenfaßt und diesem Tripel eine eins zuordnet, d.h. H_1 stützt, falls es monoton ist, d.h. falls $y_{3k+1} \leq y_{3k+2} \leq y_{3k+3}$ oder aber $y_{3k+1} \geq y_{3k+2} \geq y_{3k+3}$, nicht jedoch $y_{3k+1} = y_{3k+2} = y_{3k+3}$ gilt. Anderenfalls wird dem entsprechenden Tripel eine Null zugeordnet, d.h. es wird H_0 gestützt.

Muß H_1 beibehalten werden, d.h. ist von einer Nichtstationarität der Zeitreihenwerte auszugehen, so wird für die bereits erhobenen Daten die Differenzenreihe

$$(3.3.16) \quad w_t = y_t - y_{t-1}$$

gebildet und es werden die w_t 's auf Stationarität überprüft, indem man für die Daten w_t die Hypothesen (3.3.15) in der beschriebenen Weise testet.

Kann man, nachdem der dargestellte Vorgang d-mal wiederholt wurde, zum erstenmal H_0 beibehalten, so bedeutet dies, daß bei einer Gesamtirrtumswahrscheinlichkeit von maximal $\alpha + \beta$ die Differenzenreihe $(1 - B)^d y_t$ stationär ist.

Ist für die Zeitreihe $\{y_t\}$ ein saisonales Pattern der Länge s bestimmt worden (vgl. hierzu Abschnitt 3.4), so muß zunächst ermittelt werden, ob die Zeitreihe $(1 - B)^d y_t$ einem stationären Prozeß gehorcht oder ob eine saisonale Differenzenbildung erforderlich ist. Dies geschieht vollkommen analog zu dem vorstehend beschriebenen Verfahren zur Bestimmung von d, indem man mit Hilfe von Noether's Omnibus-Sequentialtest für vorgegebenes α und β für die u.U. differenzierten Daten w_t die Hypothesen

$$(3.3.17) \quad \begin{aligned} H_0: D &= 0 \\ H_1: D &> 0 \end{aligned}$$

unter Verwendung des SPRT getestet.

Hierzu werden jeweils drei Daten w_{ks+1+j} , $w_{(k+1)s+j}$, $w_{(k+2)s-1+j}$ für $k = 0, 1, \dots$ und $j = 0, 1, \dots, s-1$ zu einem Terzett zusammengefaßt und es wird überprüft, ob diese Tripel monoton sind. Ist dies der Fall, d.h. gilt $w_{ks+1+j} \leq w_{(k+1)s+j} \leq w_{(k+2)s-1+j}$ oder aber $w_{ks+1+j} \geq w_{(k+1)s+j} \geq w_{(k+2)s-1+j}$, nicht jedoch $w_{ks+1+j} = w_{(k+1)s+j} = w_{(k+2)s-1+j}$, so wird die Alternativhypothese gestützt, indem diesem Tripel eine eins zugeordnet wird. Anderenfalls wird diesem Tripel eine Null zugeordnet und somit die Nullhypothese gestützt.

Muß H_1 beibehalten werden, d.h. ist von einer saisonalen Nichtstationarität der Daten auszugehen, so ist die Differenzenreihe

$$(3.3.18) \quad ws_t = w_t - w_{t-s}$$

zu bilden und es müssen für die ws_t 's die Hypothesen (3.3.17) erneut überprüft werden.

Kann nach D-facher saisonaler Differenzenbildung die Nullhypothese zum erstenmal beibehalten werden, so ist die saisonale

Differenzenreihe $(1 - B^s)^D w_t$ stationär. Somit ist bezogen auf die u.U. logarithmisch transformierten Daten y_t die Zeitreihe $(1 - B^s)^D (1 - B)^d y_t$ stationär.

3.4 Anwendung der Sequenzanalyse zur Bestimmung von s

In diesem Abschnitt soll mit Hilfe der Sequenzanalyse ein saisonales Pattern der Länge s bestimmt werden. Da bei diesem Vorgehen mehrere Hypothesen gegenübergestellt werden müssen, wird zunächst auf die Anwendung der Sequenzanalyse bei Vorliegen von mehreren Alternativhypothesen eingegangen.

3.4.1 Die Anwendung der Sequenzanalyse bei Problemen mit mehreren Alternativhypothesen

Bei den bisherigen Betrachtungen wurde der Nullhypothese H_0 lediglich genau eine Alternativhypothese H_1 gegenübergestellt. Viele praktische Fragestellungen erfordern es jedoch, eine Entscheidung zugunsten einer Ausprägung von k möglichen Ausprägungen eines Parameters $\underline{\theta}$ zu treffen; d.h. es besteht die Aufgabe, die k Hypothesen

$$H_0 : \underline{\theta} = \underline{\theta}_0$$

$$H_1 : \underline{\theta} = \underline{\theta}_1$$

$$(3.4.1) \quad H_2 : \underline{\theta} = \underline{\theta}_2$$

$$\vdots$$

$$H_{k-1} : \underline{\theta} = \underline{\theta}_{k-1}$$

simultan zu überprüfen.

Zur Lösung des dargestellten Problems soll im folgenden ein Verfahren von Armitage (1950) beschrieben werden, das im Gegensatz zu anderen Vorgehensweisen nicht auf bestimmte Verteilungen beschränkt ist und auch nicht notwendigerweise die Unabhängigkeit

der Einzelbeobachtungen voraussetzt (vgl. hierzu auch: Govindarajulu, 1975; Malý, 1960; Wetherill, 1975). Es bezeichne

$$(3.4.2) \quad p_{im} = f(x_1, \dots, x_m; \theta_i) \quad , \quad i = 0, 1, \dots, k-1$$

den Wert der Wahrscheinlichkeits- bzw. Dichtefunktion nach m Beobachtungen unter der Bedingung, daß $\theta = \theta_i$ gilt.

Mit Hilfe der Prüfgrößen p_{im}/p_{jm} für $i \neq j$ ist es nunmehr möglich, eine Hypothese H_i gegen jede andere Hypothese H_j mit Hilfe von SPRT's zu testen. Um diese Tests durchführen zu können, müssen für jede Kombination von Indizes i, j mit $i \neq j$ und $i, j = 0, 1, \dots, k-1$ kritische Werte A_{ij} und B_{ij} vorgegeben werden.

Armitage (1950) wählt $B_{ij} = 1/A_{ji}$, so daß bei Anwendung des SPRT auf die Hypothesen H_i und H_j keine Entscheidung zugunsten von H_i oder H_j möglich ist, solange die Ungleichung

$$(3.4.3) \quad \frac{1}{A_{ji}} < \frac{p_{im}}{p_{jm}} < A_{ij}$$

erfüllt ist.

Ungleichung (3.4.3) sei im folgenden mit $I_{ji}(m)$ bezeichnet. Bildet man den Kehrwert zu Ungleichung (3.4.3), so erhält man die Ungleichung

$$(3.4.4) \quad \frac{1}{A_{ij}} < \frac{p_{jm}}{p_{im}} < A_{ji} \quad ,$$

d.h. es gilt grundsätzlich $I_{ij}(m) = I_{ji}(m)$. Somit erhält man für jede der m Beobachtungen $\frac{1}{2} \cdot k \cdot (k-1)$ unterschiedliche Ungleichungen der Form (3.4.4). Im folgenden gelte $Z_m(j, i) := p_{im}/p_{jm}$. Es stellt sich nunmehr die Frage, wann eine Entscheidung zugunsten von einer der k Hypothesen getroffen werden kann.

Sind nach m Beobachtungen für irgendein $j \neq i$ alle $k-1$ Ungleichungen $I_{j0}(m), \dots, I_{j, j-1}(m), I_{j, j+1}(m), \dots, I_{j, k-1}(m)$ in der Weise verletzt, daß

$$(3.4.5) \quad Z_m(i,j) \leq \frac{1}{A_{ij}}$$

gilt, so ist die Hypothese H_j beizubehalten.

Sind hingegen nach m Beobachtungen alle $k - 1$ Ungleichungen

$I_{0i}(m), \dots, I_{i-1,i}(m), I_{i+1,i}(m), \dots, I_{k-1,i}(m)$ in der Weise verletzt, daß

$$(3.4.6) \quad Z_m(i,j) \geq A_{ji}$$

gilt, so ist die Hypothese H_i anzunehmen.

Ist keine der Bedingungen (3.4.5) bzw. (3.4.6) erfüllt, so ist eine $(m + 1)$ -te Beobachtung erforderlich. Man erkennt leicht, daß man als Spezialfall des beschriebenen Verfahrens den in Abschnitt 3.2 dargestellten SPRT erhält, wenn man lediglich $k = 2$ Hypothesen testet.

Gelangt das beschriebene Verfahren nicht nach spätestens m_0 Beobachtungen zu einer Entscheidung, so bedeutet dies, daß mindestens eine der $\frac{1}{2} \cdot k \cdot (k - 1)$ Ungleichungen $\{I_{ji}(m)\}$

$(j < i = 0, \dots, k-1)$ für alle m ($1 \leq m \leq m_0$) erfüllt sein muß.

Folglich erhält man die nachstehende Abschätzung für die Wahrscheinlichkeit, daß bis zu einem endgültigen Abschluß des Verfahrens mehr als m_0 Beobachtungen erforderlich sind (vgl. Ghosh, 1970, S. 274):

$$\begin{aligned} (3.4.7) \quad P(m > m_0 \mid \underline{\theta}) &\leq P(\text{mindestens eine der Ungleichungen} \\ &\quad I_{01}(m_0), \dots, I_{k-2,k-1}(m_0) \text{ ist erfüllt} \mid \underline{\theta}) \\ &\leq \sum_{j < i} E P\left(\frac{1}{A_{ji}} < Z_{m_0}(j,i) < A_{ij} \mid \underline{\theta}\right) \end{aligned}$$

Es bezeichne π_{ij} die Wahrscheinlichkeit, die Hypothese H_i zu akzeptieren, obwohl die Hypothese H_j zutrifft, d.h. testet man lediglich $k = 2$ Hypothesen, so ist $\pi_{10} = \alpha$ und $\pi_{01} = \beta$. Wird nach m Beobachtungen die Hypothese H_i angenommen, so sind für sämtliche

$j \neq i$ die Ungleichungen $Z_m(j,i) \geq A_{ij}$ erfüllt. In diesem Fall muß jedoch auch die Wahrscheinlichkeit π_{ii} einer korrekten Entscheidung sehr viel größer sein als jede Wahrscheinlichkeit π_{ij} ($i \neq j$) für eine Fehlentscheidung zugunsten von H_i . Dies ist gewährleistet, wenn

$$(3.4.8) \quad \frac{\pi_{ii}}{\pi_{ij}} > A_{ij} \quad \text{für alle } j \neq i$$

gilt. Da $\pi_{ii} < 1$ ist, ergibt sich aus (3.4.8) für π_{ij} unmittelbar die notwendige Bedingung:

$$(3.4.9) \quad \pi_{ij} < \frac{1}{A_{ij}} \quad \text{für alle } j \neq i$$

Sind die Beobachtungen unabhängig, so gelangt das Verfahren von Armitage (1950) mit Sicherheit nach endlich vielen Erhebungen zu einem Ergebnis zugunsten einer der vorgegebenen Hypothesen H_i . Somit folgt:

$$(3.4.10) \quad \sum_{i=0}^{k-1} \pi_{ij} = 1 \quad \text{für } j = 0, \dots, k-1$$

Aus (3.4.10) ergibt sich unter Beachtung von Ungleichung (3.4.9):

$$(3.4.11) \quad \pi_{jj} = 1 - \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^{k-1} \pi_{ij} \geq 1 - \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^{k-1} \frac{1}{A_{ij}} \quad \text{für } j = 0, \dots, k-1$$

Wird für alle Kombinationen i, j die gleiche Konstante A_{ij} vorgegeben, indem man z.B. in Analogie zu den Ausführungen in Abschnitt 3.2 $A_{ij} = A = \frac{1-\alpha}{\alpha}$ setzt, so folgt aus (3.4.11):

$$(3.4.12) \quad \pi_{jj} \geq 1 - \frac{(k-1) \cdot \alpha}{1-\alpha} \quad \text{für } j = 0, \dots, k-1$$

Alle gemäß den vorstehenden Kriterien zu bestimmenden Wahrscheinlichkeiten lassen sich in einer $(k \times k)$ -Fehlermatrix P zusammenfassen, deren Zeilensummen eins sind, wenn das Verfahren mit Sicherheit zu einem Ergebnis gelangt.

$$(3.4.13) \quad P = \begin{bmatrix} \pi_{00} & \pi_{01} & \cdots & \pi_{0,k-1} \\ \pi_{10} & \pi_{11} & \cdots & \pi_{1,k-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \pi_{k-1,0} & \pi_{k-1,1} & \cdots & \pi_{k-1,k-1} \end{bmatrix}$$

Eine ausführliche Behandlung sequentieller Testverfahren mit k Hypothesen für den Fall, daß der betrachteten Zufallsvariablen X eine Binomial-, Poisson- oder Normalverteilung zugrunde liegt, findet man bei Malý (1960, 1961). Darüberhinaus zieht Malý zusammengesetzte Hypothesen in seine Betrachtungen ein.

Beispielsweise werde das Intervall $[0, 1]$ durch die $k - 1$ Punkte $x_1 < x_2 < \dots < x_{k-1}$ in k Intervalle aufgeteilt und es gelte $0 = x_0 < x_1$ sowie $x_{k-1} < x_k = 1$. Es sollen nunmehr die k Hypothesen

$$(3.4.14) \quad \begin{aligned} H_0 &: x_0 \leq p < x_1 \\ H_1 &: x_1 \leq p < x_2 \\ &\vdots \\ H_i &: x_i \leq p < x_{i+1} \\ &\vdots \\ H_{k-1} &: x_{k-1} \leq p < x_k \end{aligned}$$

geprüft werden. Hierbei wird eine Größe $\delta > 0$ so vorgegeben, daß

$$(3.4.15) \quad x_i + \delta < x_{i+1} - \delta \quad \text{für } i = 1, \dots, k-2$$

sowie

$$(3.4.16) \quad 0 < x_1 - \delta \quad \text{und} \quad x_{k-1} + \delta < 1$$

gilt.

Nunmehr läßt sich das Problem auf die Überprüfung der Hypothesen

$$(3.4.17) \quad \begin{array}{ll} H_{i-} : p = x_i - \delta & i = 1, \dots, k-1 \\ H_{i+} : p = x_i + \delta & \end{array}$$

mit Hilfe von $k - 1$ voneinander unabhängigen SPRT's reduzieren.

Betrachtet man die abgeschlossenen Intervalle $[x_{i-1} + \delta, x_i - \delta]$ für $i = 1, \dots, k-1$ bzw. $[0, x_1 - \delta]$ für H_0 und $[x_{k-1} + \delta, 1]$ für H_{k-1} , so stellt für diese Intervalle ausschließlich die Annahme der entsprechenden Hypothese H_{i-1} eine korrekte Entscheidung dar. Hingegen sind die offenen Intervalle $]x_i - \delta, x_i + \delta[$ Indifferenzzonen, da für $i = 1, 2, \dots, k-1$ in diesen Bereichen keine eindeutige Entscheidung zugunsten von H_{i-1} oder H_i möglich ist. Die dargestellten Zusammenhänge sind in Abbildung 3.1 veranschaulicht.

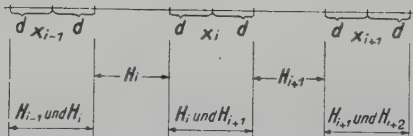


Abb. 3.1: Schematische Darstellung von Annahme- und Indifferenzzonen bei Überprüfung der Hypothesen (3.4.14)
(aus: Malý, 1960, S. 47)

Es werden nunmehr die Hypothesen (3.4.17) für $i = 1, \dots, k-1$ sequentiell getestet, wobei diese $k - 1$ Tests unabhängig voneinander sind. Malý (1960) führt aus, daß es genau einen Index l gibt, so daß bei Überprüfung der Hypothesen (3.4.17) für alle $i \geq l$ die Hypothesen H_{i-} und für alle $i < l$ die Hypothesen H_{i+} angenommen werden; d.h. es werden insbesondere die Hypothesen $H_{(l-1)+}$ und H_{l-} beibehalten. Damit ist jedoch $x_{l-1} + \delta \leq p \leq x_l - \delta$, d.h. es ist die Hypothese H_{l-1} aus (3.4.14) anzunehmen.

3.4.2 Die Bestimmung von Zyklen der Länge s

Geht man einmal davon aus, daß nach u.U. erfolgter logarithmischer Transformation der Rohdaten sowie d -facher Differenzbildung die Zeitreihe $\{w_t\}$ einen rein deterministischen saisonalen Verlauf hat (z.B. Sinusschwingung) und bestimmt man sich sequentiell die Zeitpunkte $t_{\max}(i)$, an denen maximale Werte angenommen werden und $t_{\min}(i)$, an denen minimale Werte angenommen werden, so kann davon ausgegangen werden, daß die Differenzen $t_{\max}(i) - t_{\max}(1)$ bzw. $t_{\min}(i) - t_{\min}(1)$ ganzzahlige Vielfache von s sind. Somit folgt für eine Zeitreihe mit periodischer Schwankung

$$(3.4.18) \quad E\{t_{\max}(j) - t_{\max}(1)\} = k_{j1} \cdot s$$

bzw.

$$(3.4.19) \quad E\{t_{\min}(j) - t_{\min}(1)\} = c_{j1} \cdot s$$

für alle j, l , wobei k_{j1} und c_{j1} ganzzahlig sind.

Geht man weiter davon aus, daß bei Vorliegen von $T_d = T - d$ Daten s maximal $T^* = \text{INT}(T_d/5)$ beträgt und bezeichnet T^{**} die nächstgelegene größere ganze Zahl, die ohne Rest durch die Intervalllänge λ teilbar ist, d.h. es gelte $T^* \leq T^{**} \leq T^* + (\lambda - 1)$, so läßt sich der Bereich, in dem s liegt näher eingrenzen. Hierzu werden die k Hypothesen

$$H_0 : T^{**} \geq s > T^{**} - \lambda$$

$$H_1 : T^{**} - \lambda \geq s > T^{**} - 2 \cdot \lambda$$

$\vdots$

$$(3.4.20) \quad H_i : T^{**} - \lambda \cdot i \geq s > T^{**} - \lambda \cdot (i+1)$$

$\vdots$

$$H_{k-1} : \lambda \geq s > 0$$

getestet, wobei $k = T^{**}/\lambda$ gilt.

Die Hypothesen (3.4.20) lassen sich mit dem von Malý (1960) entwickelten Verfahren überprüfen, daß in Abschnitt 3.4.1 beschrieben wurde. Hierbei geht man so vor, daß man mit Hilfe von $k - 1$ unabhängigen SPRT's die Hypothesen

$$(3.4.21) \quad H_{i-} : s \leq T^{**} - \lambda \cdot i - 1$$

$$H_{i+} : s \geq T^{**} - \lambda \cdot i + 1$$

testet. Hierzu bildet man sequentiell Differenzen von Maxima- bzw. Minimazeitpunkten $t_{\max}(j) - t_{\max}(1)$ bzw. $t_{\min}(j) - t_{\min}(1)$ und ordnet einer jeden solchen Differenz eine Null zu, d.h. stützt die Hypothese H_{i-} , wenn diese Differenz kleiner oder gleich $T^{**} - \lambda \cdot i - 1$ ist. Ist hingegen die Differenz größer oder gleich $T^{**} - \lambda \cdot i + 1$, so wird die Alternativhypothese H_{i+} durch die Zuordnung einer eins gestützt. Somit erhält man eine 0,1-Folge und es kann wiederum mit Hilfe des in Abschnitt 3.2 beschriebenen Testverfahrens unter Anwendung des SPRT's eine Entscheidung zugunsten von H_{i-} oder H_{i+} gefällt werden.

Führt man alle k SPRT's durch, so folgt aus Malýs (1960) Ausführungen, daß es genau einen Index l gibt, so daß im vorliegenden Fall für alle $i \leq l$ die Hypothesen H_{i-} und für alle übrigen $i > l$ die Hypothesen H_{i+} angenommen werden. Dies bedeutet jedoch, daß die Hypothese H_l aus (3.4.20) anzunehmen ist, d.h. es gilt $T^{**} - \lambda \cdot l \geq s > T^{**} - \lambda \cdot (l+1)$.

Ist H_1 beibehalten worden, so ist s genauer zu bestimmen, d.h. es sind die λ Hypothesen

$$\begin{aligned}
 H_0 &: s = T^{**} - \lambda \cdot (l+1) + 1 \\
 H_1 &: s = T^{**} - \lambda \cdot (l+1) + 2 \\
 &\vdots \\
 (3.4.22) \quad H_i &: s = T^{**} - \lambda \cdot (l+1) + i + 1 \\
 &\vdots \\
 H_{\lambda-1} &: s = T^{**} - \lambda \cdot l
 \end{aligned}$$

simultan zu testen.

Dies geschieht mit Hilfe des in Abschnitt 3.4.1 beschriebenen Verfahrens von Armitage (1950) unter Verwendung der Autokorrelationen der w_t $\rho_{s,m}$ für $T^{**} - \lambda \cdot (l+1) + 1 \leq s \leq T^{**} - \lambda \cdot l$; ferner gibt m die Anzahl der Daten w_t an, aus denen die ρ_s bestimmt werden. Da λ Hypothesen gegenübergestellt werden, erhält man für jedes m insgesamt $\lambda \cdot (\lambda - 1)/2$ Quotienten von Autokorrelationen der Form

$$(3.4.23) \quad ACQ_{ij}(m) = \frac{\rho_{s_{ij},m}}{\rho_{s_i,m}} \quad \text{mit } i, j = 1, \dots, \lambda \quad \text{und } i < j$$

Hierbei gilt $s_i = T^{**} - \lambda \cdot (l+1) + i$ für $i = 1, \dots, \lambda$.

Trifft man die Annahme, daß alle λ in Betracht gezogenen Werte für s gleichwahrscheinlich sind, so beträgt die Wahrscheinlichkeit für jede der Hypothesen aus (3.4.22) $1/\lambda$. Man erhält dann für jeden der $\lambda \cdot (\lambda - 1)/2$ Quotienten (3.4.23) eine Prüfgröße $PPQ_{ij}(m)$ der Form:

$$(3.4.24) \quad PPQ_{ij}(m) = \lambda^{sr_{ij} \cdot (1/\lambda)} (s_{m_{ij}} - sr_{ij})^{(s_{m_{ij}} - sr_{ij})}, \quad i, j = 1, \dots, \lambda \\
 \text{und } i < j$$

Hierbei bezeichnet sm_{ij} die Anzahl der bisher ausgewerteten Quotienten $ACQ_{ij}(m)$ sowie $sr_{ij} \leq sm_{ij}$ die Anzahl derjenigen vorliegenden Quotienten, die für die Annahme der Hypothese H_{j-1} sprechen. Die Hypothese H_{j-1} wird gestützt, falls $|ACQ_{ij}(m)| > 1$ ist; in diesem Fall wird sr_{ij} um eins erhöht. Gilt $|ACQ_{ij}(m)| \leq 1$, so wird die Hypothese H_{j-1} gestützt, indem man sr_{ij} nicht erhöht.

Gilt nach der Auswertung von 1 Quotienten der Form (3.4.23) für irgendein $i \neq j$ für alle $\lambda - 1$ Prüfgrößen $PPQ_{i1}, \dots, PPQ_{i\lambda}$

$$(3.4.25) \quad PPQ_{ij}(m) \leq B \quad ,$$

so ist die Hypothese H_{i-1} beizubehalten.

Gilt hingegen für ein beliebiges $j \neq i$ für alle $\lambda - 1$ Prüfgrößen $PPQ_{1j}, \dots, PPQ_{\lambda j}$

$$(3.4.26) \quad PPQ_{ij}(m) \geq A \quad ,$$

so ist die Hypothese H_{j-1} anzunehmen.

Gilt $1 \leq s \leq \lambda$ und muß die Nullhypothese aus (3.4.22) beibehalten werden, so bedeutet dies, daß der Zeitreihe kein saisonales Pattern zugrundeliegt, d.h. die Zeitreihe läßt sich mit Hilfe eines univariaten Modells beschreiben. Haben die vorstehenden Hypothesentests ergeben, daß von einer Saisonalität auszugehen ist, so müssen die Hypothesen (3.3.17) getestet werden, um den saisonalen Differenzengrad D ermitteln zu können (s.a. Abschnitt 3.3.4).

3.5 Identifikation der Modellparameter p und q sowie P und Q

Im folgenden sollen zunächst die Modellparameter p und q unter Verwendung der ESACF-Methode (vgl. Abschnitt 2.2) festgelegt werden. Die für dieses Vorgehen benötigten Autokorrelationen werden aus den Daten sequentiell bestimmt und mit Hilfe eines sequentiellen Testverfahrens auf Signifikanz überprüft; d.h. es werden die Hypothesen

$$(3.5.1) \quad \begin{aligned} H_0: \rho_k &= 0 \\ H_1: \rho_k &\neq 0 \end{aligned}$$

für vorgegebenes α und β getestet.

Da Td Daten vorliegen, sollten in die Berechnung von $r_{k,t}$ mindestens $\text{INT}(0.8 \cdot Td)$ Daten eingehen. Betrachtet man Formel (2.1.7), so ergibt sich unmittelbar, daß sich $r_{k,t}$ nur korrekt ermitteln läßt, wenn das hierfür benötigte $\bar{y}$ nicht unter Verwendung aller vorliegenden Td Daten, sondern lediglich mit Hilfe der ersten t Daten bestimmt wird. Hierbei erfolgt die Berechnung von $\bar{y}_t$ für $t = 1, \dots, Td$ am besten rekursiv unter Anwendung des nachstehenden Algorithmus (vgl. Spriet & Vansteenkiste, 1982, S. 77):

$$(3.5.2) \quad \begin{aligned} \bar{y}_0 &= 0 \\ \bar{y}_t &= \bar{y}_{t-1} - \frac{1}{t} \cdot (\bar{y}_{t-1} - y_t) \quad \text{für } 0 < t \leq Td \end{aligned}$$

Um den Hypothesentest durchführen zu können, benötigt man zuerst die Autokorrelationen $r_{1,t}$ zum Lag eins für $t \geq T^* = \text{INT}(0.8 \cdot Td)$, sowie die Standardabweichung $\sigma_{r_1} = 1/\sqrt{T^*}$ gemäß (2.2.16). Ist nunmehr ein betrachtetes $r_{1,t}$ insignifikant, d.h. gilt $|r_{1,t}| \leq 1.96 \cdot \sigma_{r_1}$, so wird die Nullhypothese aus (3.5.1) gestützt, indem man dieser Autokorrelation eine Null zuordnet. Ist hingegen $|r_{1,t}| > 1.96 \cdot \sigma_{r_1}$, so wird die Alternativhypothese aus (3.5.1) gestützt, indem man diesem $r_{1,t}$ eine eins zuordnet. Somit erhält man eine 0,1-Folge, mit deren Hilfe unter Anwendung der Binomialverteilung der Hypothesentest durchgeführt werden kann (vgl. Abschnitt 3.2).

Kann für $k = 1$ die Nullhypothese aus (3.5.1) beibehalten werden, so bedeutet dies, das dem nichtsaisonalen Teil der Zeitreihe ein ARIMA(0,d,0)-Prozeß zugrundeliegt. Andernfalls ist $q \geq 1$ und/oder $p \geq 1$. Es ist dann σ_{r_2} zu bestimmen und die Hypothesen (3.5.1) sind für $k = 2$ wie beschrieben zu testen.

Mußte bei den sequentiellen Tests für $k = 1, \dots, q$ die Alternativhypothese aus (3.5.1) beibehalten werden und ergibt sich ferner, daß $r_{q+1,t}$ insignifikant ist, so muß für den nichtsaisonalen Teil

der Zeitreihe von einem ARIMA(0,d,q)-Modell ausgegangen werden. Geht man von der Annahme aus, daß $q \leq 5$ ist und ist für alle betrachteten q die Alternativhypothese aus (3.5.1) erfüllt, so kann davon ausgegangen werden, daß $p \geq 1$ ist. Es ist daher aus den vorliegenden Daten der Parameter $\phi_1(1)$ zu schätzen und die Zeitreihe $w_{1,t}^{(j)}$ gemäß (2.2.6) zu bilden. Unter Verwendung der so gewonnenen Zeitreihendaten ist die Hypothese (3.5.1) für $k = 1, \dots, 6$ wie beschrieben zu testen. Kann die Nullhypothese für ein $k = q + 1$ beibehalten werden, so ist für den nichtsaisonalen Teil der Zeitreihe von einem ARIMA(1,d,q)-Modell auszugehen. Andernfalls ist $p \geq 2$ und es sind weitere Zeitreihen $w_{i,t}^{(j)}$ zu bilden und Hypothesentests in der vorstehend beschriebenen Form durchzuführen, bis für eine Zeitreihe $w_{p,t}^{(j)}$ und ein $k = q + 1$ die Nullhypothese aus (3.5.1) beibehalten werden kann, so daß man von einem ARIMA(p,d,q)-Modell ausgehen kann.

Im Zusammenhang mit der ESACF-Methode ist noch darauf hinzuweisen, daß lediglich das maximale p und q bestimmt werden. Betrachtet man das Beispiel 4 aus Tsay & Tiao (1984), so würde man bei vorheriger Ermittlung von d ein ARIMA(1,1,5)-Modell identifizieren, d.h. man hat für die Parameterschätzung von einem Modell der Form

$$(3.5.3) \quad (1 - B)(1 - \phi_1 B)(y_t - \bar{y}) = (1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \theta_3 B^3 - \theta_4 B^4 - \theta_5 B^5) \cdot a_t$$

auszugehen, obwohl in Wirklichkeit ein multiplikativer ARIMA(1,1,0)x(0,0,1)₅-Prozeß, d.h. ein Modell der Form

$$(3.5.4) \quad (1 - B)(1 - \phi_1 B)(y_t - \bar{y}) = (1 - \theta_5 B^5) \cdot a_t$$

vorliegt. Somit müssen vorläufig sieben Parameter geschätzt werden, obwohl das Modell lediglich drei Parameter enthält.

Ein Hinweis auf die dargestellte Form des "overfitting" ist gegeben, wenn ein Großteil der Parameter ϕ_i und/oder θ_j insignifikant ist und die Indizes der meisten signifikanten Parameter ϕ_i und/oder θ_j ganzzahlige Vielfache einer u.U. identifizierten

Periodizität der Länge $s \geq 2$ (vgl. Abschnitt 3.4.2) sind. Ferner sollte darauf geachtet werden, ob p und/oder q ganzzahlige Vielfache von s sind.

Ist $p > 0$, so sind bei der dargestellten Vorgehensweise bereits während der Identifikationsphase Parameter $\phi_{i(k)}$ zu schätzen. Darüberhinaus müssen nach Beendigung der Identifikation die Parameter θ_j ($j = 1, \dots, q$) bestimmt werden (s.a. Abschnitt 2.3).

Enthält die Zeitreihe eine saisonale Komponente, so lassen sich die Ordnungen P und Q des saisonalen ARIMA-Prozesses in der oben beschriebenen Weise ermitteln, indem man für $k = 1, \dots, 6$ die Hypothesen

$$(3.5.5) \quad \begin{aligned} H_0: \rho_{k \cdot s} &= 0 \\ H_1: \rho_{k \cdot s} &\neq 0 \end{aligned}$$

sequentiell getestet. Hierzu müssen die Autokorrelationen $r_{k \cdot s, t}^{(j)}$ für die jeweils betrachtete Zeitreihe $ws_{1 \cdot s, t}^{(j)}$, die aus den Fehlertermen ε_t gebildet wird (vgl. (2.2.19)), sowie die Standardabweichungen $\sigma_{r_{k \cdot s}}$ herangezogen werden. Unter Verwendung dieser Größen kann die $k \cdot s$ sequentielle Überprüfung der Hypothesen (3.5.5) genau wie für den nichtsaisonalen Teil der Zeitreihe erfolgen. Muß schließlich für ein $l = P$ und ein $k = Q + 1$ die Nullhypothese aus (3.5.5) beibehalten werden, so kann davon ausgegangen werden, daß sich die Zeitreihe $\{(1 - B^s)^D \varepsilon_t\}$ mit Hilfe eines $\text{ARMA}(P, Q)_s$ -Modells beschreiben läßt, d.h. es gilt $\phi(B)\phi(B^s)(1 - B)^d(1 - B^s)^D(y_t - \bar{y}) = \theta(B)\theta(B^s)a_t$. Somit ist es insgesamt möglich, unter Anwendung der beschriebenen sequentiellen Testverfahren und unter Berücksichtigung der in den vorhergehenden Abschnitten dargestellten sequentiellen Tests, ein multiplikatives $\text{ARIMA}(p, d, q) \times (P, D, Q)_s$ -Modell zu identifizieren, ohne hierbei auf Heuristiken zurückgreifen zu müssen.

3.6 Die Überprüfung des gefitteten ARIMA-Modells auf Adäquatheit

Ist ein $ARIMA(p,d,q) \times (P,D,Q)_S$ -Prozeß gefittet worden, so muß abschliessend festgestellt werden, ob dieses Modell adäquat ist, d.h. es muß überprüft werden, ob die Residuen a_t einem "white-noise"-Prozeß gehorchen. Dies ist genau dann der Fall, wenn sie unabhängig und normalverteilt mit dem Erwartungswert Null sind. In diesem Zusammenhang gilt für die Residuen a_t :

$$\begin{aligned}
 a_t = & z_t - \phi_1 z_{t-1} - \dots - \phi_p z_{t-p} \\
 & - \phi_s z_{t-s} + \phi_1 \phi_s z_{t-s-1} + \dots + \phi_p \phi_s z_{t-s-p} \\
 & - \dots \\
 & - \phi_{Ps} z_{t-Ps} + \phi_1 \phi_{Ps} z_{t-Ps-1} + \dots + \phi_p \phi_{Ps} z_{t-Ps-p} \\
 (3.6.1) \quad & + \theta_1 a_{t-1} + \theta_2 a_{t-2} + \dots + \theta_q a_{t-q} \\
 & + \theta_s a_{t-s} - \theta_1 \theta_s a_{t-s-1} - \dots - \theta_q \theta_s a_{t-s-q} \\
 & + \dots \\
 & + \theta_{Qs} a_{t-Qs} - \theta_1 \theta_{Qs} a_{t-Qs-1} - \dots - \theta_q \theta_{Qs} a_{t-Qs-q}
 \end{aligned}$$

mit $z_t = (1 - B)^d (1 - B^S)^D (y_t - \bar{y})$

Zunächst soll ermittelt werden, ob die Residuen a_t normalverteilt sind.

3.6.1 Überprüfung der Residuen auf Normalverteilung

Gegeben sind $Td - p - P \cdot s$ Residuen a_t mit dem Mittelwert $\bar{a}$ und der geschätzten Standardabweichung s_a . Ferner seien die $Td - p - P \cdot s$ standardnormalverteilten Zufallsvariablen U_i gegeben. Dann sind die Zufallsvariablen

$$(3.6.2) \quad U_i^* = s_a \cdot U_i + \bar{a}$$

normalverteilt mit dem Erwartungswert $\bar{a}$ und der Varianz s_a^2 . Es kann nunmehr mit Hilfe des Vorzeichentests (s.a. De Groot, 1975, S. 482) die Hypothese geprüft werden, ob die beiden Grundgesamtheiten $\{U_i^*\}$ und $\{a_t\}$ die gleiche Verteilung haben. Kann die Nullhypothese der Gleichheit der Verteilungen beibehalten werden, so folgt unmittelbar, daß die Residuen a_t einer Normalverteilung unterliegen, da bekannt ist, daß die U_i^* normalverteilt sind.

Der Vorzeichentest beruht darauf, daß man die Differenzen

$$(3.6.3) \quad D_i = U_i^* - a_i$$

bildet und einer jeden solchen Differenz eine eins zuordnet, falls $D_i > 0$ ist sowie eine Null zuordnet, falls $D_i < 0$ gilt. Ist $D_i = 0$, so bleibt diese Differenz unberücksichtigt.

Trifft die Nullhypothese, daß beide Grundgesamtheiten die gleiche Verteilung besitzen, zu, so muß die Anzahl der positiven Differenzen gleich der Anzahl der negativen Differenzen sein. Somit ist die Summe

$$(3.6.4) \quad D = \sum_{i=1}^{Tn} D_i$$

binomialverteilt mit $p = 0.5$. In (3.6.4) bezeichnet Tn den Stichprobenumfang $Td - p - P \cdot s$ abzüglich der Anzahl der Differenzen, für die $D_i = 0$ gilt.

Skarabis, Schlittgen, Buseke & Apostolopoulos (1978) haben den hier skizzierten Vorzeichentest sequentialisiert und erhalten für einen SPRT die Prüfgröße:

$$(3.6.5) \quad PV_n = p_1^{dn} \cdot (1 - p_1)^{n-dn} / 0.5^n$$

Hierbei bezeichnet dn die Anzahl der positiven Differenzen D_i bis zur n -ten Erhebung und p_1 ist die vorzugebende Wahrscheinlichkeit für den Fall, daß die Alternativhypothese zutrifft,

wobei jedoch $p_1 < 0.5$ gelten muß. Geht man z.B. davon aus, daß man in 75% aller Fälle ein adäquates Modell fittet, so sollte man $p_1 = 0.25$ wählen. Verwendet man zur Durchführung des Tests den SPRT, so kann die Nullhypothese, daß die a_t 's normalverteilt sind, beibehalten werden, falls $PV_n \leq B$ ist. Gilt hingegen $PV_n \geq A$, so sind die a_t 's mit einer Wahrscheinlichkeit von $1 - \alpha$ nicht normalverteilt, d.h. das gefittete $ARIMA(p,d,q) \times (P,D,Q)_s$ -Modell kann nicht als adäquat angesehen werden. Ist $B < PV_n < A$, so sind weitere Erhebungen erforderlich. Sind die Residuen a_t normalverteilt, so muß als nächstes überprüft werden, ob $E(a_t) = 0$ gilt.

3.6.2 Darstellung eines sequentiellen Testverfahrens für den Erwartungswert einer normalverteilten Zufallsvariablen

Da nur dann ein "white-noise"-Prozeß vorliegt, wenn die Zufallsvariablen a_t den Erwartungswert Null haben, müssen die Hypothesen

$$(3.6.6) \quad \begin{aligned} H_0: E(a_t) &= 0 \\ H_1: E(a_t) &\neq 0 \end{aligned}$$

getestet werden.

Da die Varianz σ_a^2 der a_t unbekannt ist, geschieht dies mit Hilfe eines sequentiellen zweiseitigen t-Tests.

Betrachtet man die Hypothesen

$$(3.6.7) \quad \begin{aligned} H_0: \quad \theta &= \theta_0 \\ H_1: |\theta - \theta_0| &\geq \delta \cdot \sigma \end{aligned}$$

für ein festes, aber beliebiges $\delta > 0$, so hat Wald (1947, S. 205ff) nachgewiesen, daß der zugehörige Likelihood-Quotient eine monoton wachsende Funktion in Abhängigkeit von $|\bar{x}_n - \theta_0|/s_n$ ist, wobei $\bar{x}_n$ und s_n das jeweils aus n Daten bestimmte arithmetische Mittel sowie die Standardabweichung bezeichnen.

Da für eine normalverteilte Zufallsvariable X die Größe $\sqrt{n} \cdot (\bar{X}_n - \theta_0) / s_n$ t -verteilt ist und auf Grund des in Abschnitt 3.6.1 beschriebenen bereits durchgeführten Testverfahrens vorausgesetzt werden kann, daß die a_t normalverteilt sind, lassen sich die Hypothesen (3.6.6) überprüfen, indem man die Hypothesen

$$(3.6.8) \quad \begin{aligned} H_0: E(a_t) &= 0 \\ H_1: |E(a_t)| &\geq \delta \cdot \sigma \end{aligned}$$

testet. Dies geschieht bei vorgegebenem α und β unter Verwendung der Prüfgröße

$$(3.6.9) \quad t_n = \sqrt{n} \cdot (\bar{a}_n) / s_{a,n}$$

Hierbei gilt (s.a. Gleichung (3.5.2)):

$$(3.6.10) \quad \begin{aligned} \bar{a}_0 &= 0 \\ \bar{a}_n &= \bar{a}_{n-1} - \frac{1}{n} \cdot (\bar{a}_{n-1} - a_n) \end{aligned}$$

sowie

$$(3.6.11) \quad s_{a,n} = \left\{ \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n a_i^2 - \bar{a}_n^2 \right\}^{1/2}$$

Es ist keine Entscheidung zugunsten von H_0 oder H_1 möglich, solange $B < |t_n| < A$ gilt, wobei B und A die Grenzen der Indifferenzzone bei Verwendung des in Abschnitt 3.2 beschriebenen SPRT's bezeichnen. Ist $|t_n| \leq B$, so kann die Nullhypothese beibehalten werden, d.h. die Residuen des ermittelten ARIMA-Modells sind normalverteilt mit dem Erwartungswert Null. Gilt hingegen $|t_n| \geq A$, so muß die Alternativhypothese $E(a_t) \neq 0$ beibehalten werden und es kann nicht davon ausgegangen werden, daß das gefittete Modell adäquat ist. Benutzt man zur Durchführung den SPRT,

so haben David & Kruskal (1956) nachgewiesen, daß das beschriebene sequentielle Testverfahren mit Sicherheit nach endlich vielen Schritten zu einer Entscheidung zugunsten von H_0 oder H_1 gelangt.

Kann davon ausgegangen werden, daß die a_t normalverteilt mit dem Erwartungswert Null sind, so muß noch aufgezeigt werden, daß die Residuen unabhängig sind, da erst in diesem Fall alle Bedingungen für die Adäquatheit des gefitteten $ARIMA(p,d,q) \times (P,D,Q)_s$ -Modells erfüllt sind. Hierzu verwendet man am besten den von Ljung & Box (1978) entwickelten Portemanteau-Test II, der bereits in Abschnitt 2.4 skizziert wurde.

3.7 Güte und Modifikation des SPRT

Die in den Abschnitten 3.3.3 und 3.3.4 beschriebenen Verfahren zur Überprüfung der Daten auf Varianzhomogenität und Stationarität basieren auf dem von Noether (1956) dargestellten Omnibus-Sequentialtest. Wichtige Kenngrößen zur Ermittlung der Güte dieses Testverfahrens sowie des SPRT's im allg. sind die Operationscharakteristik sowie der durchschnittlich zu erwartende Stichprobenumfang; auf sie soll im folgenden eingegangen werden.

3.7.1 Die Operationscharakteristik

Die Operationscharakteristik oder OC-Funktion bezeichnet die Wahrscheinlichkeit, die Nullhypothese H_0 anzunehmen. Die Richtigkeit der Nullhypothese H_0 hängt jedoch von der Beschaffenheit des Parameterpunktes $\underline{\theta}$ ab. Demzufolge ist die Operationscharakteristik eine Funktion in Abhängigkeit von $\underline{\theta}$. Umfaßt jeder Parameterpunkt $\underline{\theta}$ k Koordinaten, d.h. ist $\underline{\theta}$ ein k-tupel reeller Zahlen, so ist der zugehörige Parameterraum P_k eine Teilmenge des $\mathbb{R}^k$. Somit ist die OC-Funktion eine reellwertige Abbildung von P_k in das abgeschlossene Intervall $[0,1]$:

$$(3.7.1) \quad \begin{aligned} OC: P_k &\rightarrow [0,1] \\ \underline{\theta} &\mapsto OC(\underline{\theta}) \end{aligned}$$

Wird die Nullhypothese H_0 gegen eine Alternativhypothese H_1 getestet, so läßt sich der Parameterraum P_k in drei disjunkte Bereiche ω_a , ω_i und ω_r zerlegen.

Ist auf Grund der Beschaffenheit von $\underline{\theta} \in P_k$ die Annahme der Nullhypothese H_0 der Annahme von H_1 mit Sicherheit vorzuziehen, so gilt $\underline{\theta} \in \omega_a$, d.h. ω_a ist der Annahmebereich für H_0 . Muß hingegen für ein $\underline{\theta} \in P_k$ die Alternativhypothese H_1 angenommen werden, so ist $\underline{\theta} \in \omega_r$, d.h. ω_r ist der Ablehnungsbereich für H_0 . Ist schließlich $\underline{\theta}$ so beschaffen, daß keine eindeutige Entscheidung zugunsten von H_0 oder H_1 möglich ist, so ist $\underline{\theta} \in \omega_i$, d.h. ω_i stellt eine Indifferenzzone dar.

"In general, it will be possible to subdivide the totality of all parameter points (parameter space) into three mutually exclusive zones: a zone consisting of all points θ for which acceptance of H_0 is strongly preferred; a zone consisting of points θ for which rejection of H_0 is strongly preferred; and a zone consisting of all points θ which are not included in either of the first two zones, i.e., the third zone consists of all points θ for which neither acceptance nor rejection of H_0 is strongly preferred. We shall refer to the first zone as the zone of preference for acceptance, to the second zone as the zone of preference for rejection, and to the third zone as the zone of indifference. ... Although the subdivision of the parameter space into three zones as described above is used as a basis for the selection of a sequential test, it cannot be considered a statistical problem. Such a subdivision is made in each case on the basis of practical considerations concerning the consequences of a wrong decision." (Wald, 1947, S. 28)

Von einer idealen OC-Funktion spricht man, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

$$OC(\underline{\theta}) = 1 \quad \forall \quad \underline{\theta} \in \omega_a$$

$$(3.7.2) \quad OC(\underline{\theta}) = 0 \quad \forall \quad \underline{\theta} \in \omega_r$$

$$\omega_i = \emptyset$$

Eine solche ideale OC-Funktion ist jedoch unrealistisch. Man verlangt daher, daß für $\underline{\theta} \in \omega_r$ $OC(\underline{\theta}) \leq \beta$ gilt, da man einen Fehler 2. Art begeht, wenn man für ein $\underline{\theta} \in \omega_r$ die Nullhypothese annimmt. Gilt hingegen $\underline{\theta} \in \omega_a$, so gilt es, die Wahrscheinlichkeit, H_0 zu verwerfen, gering zu halten. Da für unabhängige Stichproben alle Sequentialtests und im Falle abhängiger Daten fast alle sequentiellen Testverfahren mit Sicherheit nach endlich vielen Erhebungen zu einer Entscheidung zugunsten von H_0 oder H_1 gelangen (vgl. Wald, 1947, S. 157ff), ist $1 - OC(\underline{\theta})$ die Wahrscheinlichkeit für die Ablehnung der Nullhypothese. Man verlangt daher $1 - OC(\underline{\theta}) \leq \alpha$, bzw. $OC(\underline{\theta}) \geq 1 - \alpha$ für alle $\underline{\theta}$ aus dem Annahmebereich ω_a . Gilt $k = 1$, d.h. ist $P \in \mathbb{R}$, so läßt sich der Parameterraum sowie seine Aufteilung in die disjunkten Teilmengen ω_a , ω_i und ω_r schematisch darstellen.

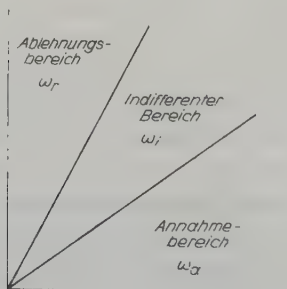


Abb. 3.2: Schematische Darstellung des Parameterraumes P
(aus: E. Weber, 1980, S. 352)

Desweiteren läßt sich die OC-Funktion in Abhängigkeit von θ graphisch darstellen. Betrachtet man z.B. den Omnibus-Sequentialtest, so hat man die Hypothesen

$$(3.7.3) \quad \begin{aligned} H_0: & p = p_0 \\ H_1: & p = p_1 \end{aligned}$$

mit $p_0 < p_1$ gegeneinander zu testen. Da $0 \leq p \leq 1$ gilt, erhält man:

$$(3.7.4) \quad \begin{aligned} \omega_a &= [0, p_0] \\ \omega_1 &=] p_0, p_1 [\\ \omega_r &= [p_1, 1] \end{aligned}$$

Man setzt daher $OC(0) = 1$; $OC(p_0) = 1 - \alpha$; $OC(p_1) = \beta$ sowie $OC(1) = 0$ und erhält die in Abbildung 3.3 dargestellte monoton fallende OC.

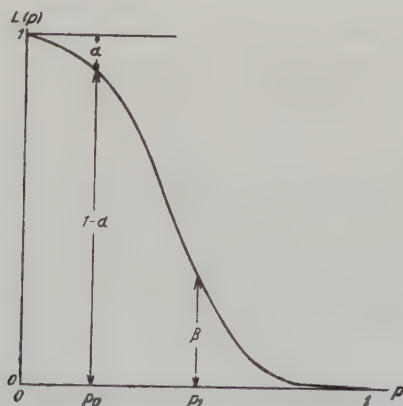


Abb. 3.3: Operationscharakteristik für die Hypothesen (3.7.3)
(aus: E. Weber, 1980, S. 353)

Bestimmt man die OC für eine binomialverteilte Zufallsvariable indirekt mit Hilfe des bei Govindarajulu (1975, S. 27) dargestellten Verfahrens, so gilt:

$$(3.7.5) \quad p = \frac{1 - \{(1 - p_1)/(1 - p_0)\}^h}{(p_1/p_0)^h - \{(1 - p_1)/(1 - p_0)\}^h} \quad \text{für } h \neq 0$$

sowie

$$(3.7.6) \quad \lim_{h \rightarrow 0} p = \frac{-\ln\{(1 - p_1)/(1 - p_0)\}}{\ln(p_1/p_0) - \ln\{(1 - p_1)/(1 - p_0)\}}$$

Ferner erhält man für die OC-Funktion die Darstellung:

$$(3.7.7) \quad OC(\underline{\theta}) = \frac{A^h - 1}{A^h - B^h} \quad \text{für } h \neq 0$$

sowie

$$(3.7.8) \quad \lim_{h \rightarrow 0} OC(\underline{\theta}) = \frac{\ln(A)}{\ln(A) - \ln(B)}$$

Wählt man für die Durchführung der in den Abschnitten 3.3.3 und 3.3.4 beschriebenen Omnibus-Sequentialtests die Irrtumswahrscheinlichkeiten $\alpha = \beta = 0.01$, so gilt $OC(0) = 1$, $OC(p_0) = 0.09$, $OC(p_1) = 0.01$ sowie $OC(1) = 0$. Gemäß (3.7.5) ergibt sich nunmehr unter Beachtung von (3.7.6):

$$(3.7.9) \quad p = \frac{1 - (3/4)^h}{(3/2)^h - (3/4)^h} = \frac{(4/3)^h - 1}{2^h - 1}, \quad h \neq 0$$

bzw.

$$(3.7.10) \quad p = \frac{-\ln(3/4)}{\ln(3/2) - \ln(3/4)}, \quad h = 0$$

Da sich für $\alpha = \beta = 0.01$ nach den in Abschnitt 3.2 beschriebenen Regeln $A = 99$ und $B = 1/99$ ergibt, folgt für die OC gemäß (3.7.7) bzw. (3.7.8):

$$(3.7.11) \quad OC(p) = \frac{99^h - 1}{99^h - (1/99)^h}, \quad h \neq 0$$

bzw.

$$(3.7.12) \quad OC(p) = \frac{\ln(99)}{\ln(99) - \ln(1/99)} = \frac{1}{2}, \quad h = 0$$

Die OC-Funktion hängt von dem Parameter $\underline{\theta}$ und damit von dessen Verteilung ab. Entsprechend gestaltet sich die Berechnung der Funktionswerte $OC(\underline{\theta})$ mehr oder weniger schwierig, je nachdem, welche Verteilung der betrachteten Zufallsvariablen X zugrunde liegt. In vielen Fällen ist lediglich eine approximative Bestimmung möglich. So findet man z.B. bei Kemp (1958) Formulierungen für die näherungsweise Berechnung der Werte der OC-Funktion. E. Weber (1980) gibt Ableitungen der OC-Funktion für die gängigsten Verteilungen sowie angenäherte Darstellungen als auch vollständige Berechnungen in tabellarischer Form für die jeweiligen OC-Kurven.

Der Wert der OC-Funktion, d.h. die Wahrscheinlichkeit für ein bestimmtes $\underline{\theta}$ die Nullhypothese anzunehmen, ist ein Kriterium zur Beurteilung der Güte eines sequentiellen Testverfahrens. Da N nicht a priori vorgegeben wird, ist ein weiteres Gütekriterium der durchschnittlich zu erwartende Stichprobenumfang. Auf die Ermittlung dieser Kenngröße soll im folgenden eingegangen werden.

3.7.2 Der durchschnittlich zu erwartende Stichprobenumfang

Ein Hauptkennzeichen aller sequentiellen Testverfahren ist, daß im Gegensatz zu den klassischen Verfahren der Stichprobenumfang N nicht a priori festgelegt werden muß. Daher wird N zu einer Zufallsvariablen und es interessiert der durchschnittlich zu erwartende Stichprobenumfang. Diese Größe wird i.a. als ASN ("Average Sample Number") bezeichnet. Sie hängt genau wie die Operationscharakteristik lediglich von der Verteilung der betrachteten Zufallsvariablen X ab und ist somit durch den Parameter $\underline{\theta}$ bestimmt. Um die Abhängigkeit von $\underline{\theta}$ zu veranschaulichen, wird die ASN häufig mit $E_{\underline{\theta}}(n)$ bezeichnet, denn es wird jedem $\underline{\theta} \in P_K$ der zu erwartende Stichprobenumfang unter $\underline{\theta}$ zugeordnet, d.h. man erhält die Abbildung:

$$(3.7.13) \quad \begin{aligned} \text{ASN: } P_k &\rightarrow \text{IR}^+ \\ \underline{\theta} &\rightarrow \underline{E}_{\underline{\theta}}(n) \end{aligned}$$

Liegt der Verteilung lediglich ein Parameter θ zugrunde, so läßt sich die ASN-Funktion graphisch darstellen. Testet man $H_0: \theta = \theta_0$ gegen $H_1: \theta = \theta_1$ mit $\theta_0 < 0.5 < \theta_1$, so kann davon ausgegangen werden, daß sowohl für einen relativ kleinen Wert θ ($\theta < \theta_0$) als auch für einen relativ großen Wert θ ($\theta > \theta_1$) ein kleiner Stichprobenumfang ausreicht, um eine Entscheidung zugunsten von H_0 oder H_1 treffen zu können. Gilt hingegen $\theta \approx 0.5$, so wird ein sehr viel höherer Stichprobenumfang erforderlich sein. Dieser Zusammenhang ist in Abbildung 3.4 graphisch veranschaulicht.

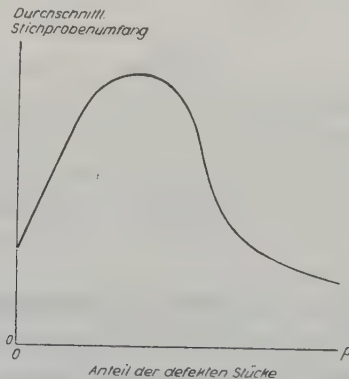


Abb. 3.4: Schematische Darstellung der ASN-Kurve
(aus: E. Weber, 1980, S. 354)

Betrachtet man die in Gleichung (3.2.10) definierten logarithmierten Likelihood-Quotienten z_i , so gilt (s.a. Fisz, 1978, S. 688):

$$(3.7.14) \quad \underline{E}_{\underline{\theta}}(z_1 + \dots + z_n) - \underline{E}_{\underline{\theta}}(n) \cdot \underline{E}_{\underline{\theta}}(z) = 0 \quad ,$$

d.h. es gilt für $\underline{E}_{\underline{\theta}}(z) \neq 0$:

$$(3.7.15) \quad E_{\underline{\theta}}(n) = \frac{E_{\underline{\theta}}(z_1 + \dots + z_n)}{E_{\underline{\theta}}(z)}$$

Wald (1947, S. 53) weist darauf hin, daß die Zufallsvariable $Z_n = \sum_{i=1}^n z_i$ die Werte $\log(A)$ und $\log(B)$ mit den Wahrscheinlichkeiten $1 - OC(\underline{\theta})$ und $OC(\underline{\theta})$ annimmt. Somit erhält man die approximative Darstellung:

$$(3.7.16) \quad E_{\underline{\theta}}(z_1 + \dots + z_n) \approx OC(\underline{\theta}) \cdot \log(B) + (1 - OC(\underline{\theta})) \cdot \log(A)$$

Aus (3.7.15) und (3.7.16) folgt somit:

$$(3.7.17) \quad E_{\underline{\theta}}(n) \approx \frac{OC(\underline{\theta}) \cdot \log(B) + (1 - OC(\underline{\theta})) \cdot \log(A)}{E_{\underline{\theta}}(z)}$$

Ist die Zufallsvariable X binomialverteilt, so folgt:

$$\begin{aligned} (3.7.18) \quad E_{\theta}(z) &= E_{\theta} \left\{ \log \frac{f(x; \theta_1)}{f(x; \theta_0)} \right\} \\ &= \theta \cdot \log \frac{f(1; \theta_1)}{f(1; \theta_0)} + (1 - \theta) \cdot \log \frac{f(0; \theta_1)}{f(0; \theta_0)} \\ &= \theta \cdot \log \frac{\theta_1}{\theta_0} + (1 - \theta) \cdot \log \frac{1 - \theta_1}{1 - \theta_0} \end{aligned}$$

Bildet man für die in den Abschnitten 3.3.3 und 3.3.4 beschriebenen Omnibus-Sequentialtests unter Beachtung von (3.7.18) und (3.7.17) sowohl die Größe $E_p(z)$ als auch die zu erwartende Anzahl von zu erhebenden Gruppen $E_G(n)$, so ergibt sich

$$\begin{aligned} (3.7.19) \quad E_p(z) &= p \cdot \log(3/2) + (1 - p) \cdot \log(3/4) \\ &= p \cdot \log(2) + \log(3/4) = (p - 2) \cdot \log(2) + \log(3) \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}
 (3.7.20) \quad E_G(n) &= \frac{OC(p) \cdot \log(1/99) + (1 - OC(p)) \cdot \log(99)}{E_p(z)} \\
 &= \frac{(1 - 2 \cdot OC(p)) \cdot \log(99)}{E_p(z)} = \frac{(1 - 2 \cdot OC(p)) \cdot \log(99)}{(p - 2) \cdot \log(2) + \log(3)}
 \end{aligned}$$

Da alle Gruppen denselben Umfang $g = 3$ haben, gilt für den zu erwartenden Stichprobenumfang:

$$(3.7.21) \quad E_p(n) = g \cdot E_G(n) = 3 \cdot E_G(n)$$

Die Größen p sowie die zugehörigen Werte $OC(p)$, $E_p(z)$, $E_G(n)$ und $E_p(n)$ sind in Tabelle 3.1 für verschiedene h erfaßt.

Tab. 3.1: OC und ASN für die Hypothesen (3.3.11) mit $\alpha = \beta = 0.01$

h	$-\infty$	-1	-0.5	0	0.5	1	$+\infty$
p	1	0.5	0.4269	0.415	0.374	0.3333	0
$OC(p)$	0	0.01	0.0913	0.5	0.909	0.99	1
$E_p(z)$	0.1761	0.0256	0.0036	0.000015	-0.013	-0.0246	-0.1249
$E_G(n)$	11.3322	76.3941	453.1121	undef.	130.5	79.4995	15.9776
$E_p(n)$	33.9966	229.1823	1359.3363	undef.	391.5	238.499	47.9328

Betrachtet man die vorstehende Tabelle 3.1, so erkennt man, daß die Wahrscheinlichkeit für die Annahme der Nullhypothese groß ist, wenn p in der Nähe von $p_0 = 1/3$ liegt und besonders klein wird, wenn p in der Nähe von $p_1 = 1/2$ liegt. So ist $OC(p) > 0.9$, wenn $p < 0.38$ ist und $OC(p) < 0.1$, wenn $p > 0.43$ gilt.

Betrachtet man jedoch den zu erwartenden Stichprobenumfang $E_p(n)$, so erkennt man, daß dieser insbesondere dann extrem hohe Werte

annimmt, wenn $p_0 < p < p_1$ gilt. So sind z.B. 238 Erhebungen erforderlich, wenn $p = p_0 = 1/3$ gilt und es müssen ca. 229 Daten erhoben werden, wenn $p = p_1 = 1/2$ gilt.

Govindarajulu (1975) weist darauf hin, daß der SPRT zwar in der Regel, jedoch nicht in jedem Falle einen geringeren Stichprobenumfang als ein entsprechender Test mit gleicher Teststärke liefert. Ist $X_1, X_2, \dots$ eine Folge von unabhängigen Zufallsvariablen, so gelangt jeder sequentielle Test mit Wahrscheinlichkeit eins zu einer Entscheidung zugunsten von H_0 oder H_1 , d.h. es ist $E_\theta(n) < \infty$.

Die Bedeutung der OC- sowie ASN-Funktion wird noch einmal von Wald (1947, S. 26f) hervorgehoben. "An OC function and an ASN function are associated with each test procedure. These two functions are perhaps the most important consequences of a test procedure. The OC function describes how well the test procedure achieves its objective of making correct decisions, and the ASN function represents the price we have to pay, in terms of the number of observations required for the test. Thus, in judging the relative merits of two different test procedures, we shall compare the OC and ASN functions of these two tests."

Im folgenden soll auf Erweiterungen des SPRT eingegangen werden, die zu einer Reduktion des zu erwartenden Stichprobenumfangs $ASN(\theta)$ führen und/oder spätestens nach einer vorgegebenen Maximalzahl von Beobachtungen zu einer Entscheidung zugunsten von H_0 oder H_1 gelangen.

3.7.3 Der SPRT bei vorgegebener Maximalzahl von Beobachtungen

Wald (1947) hat nachgewiesen, daß im Falle unabhängiger Stichproben der SPRT mit Sicherheit nach endlich vielen Beobachtungen zu einer Entscheidung zugunsten von H_0 oder H_1 führt. Darüberhinaus gelangt im Falle abhängiger Stichproben der SPRT mit an Sicherheit grenzender Wahrscheinlichkeit zu einem Ergebnis.

Unabhängig hiervon kann die Anzahl der benötigten Stichproben relativ groß werden; daher ist es bei vielen praktischen Fragestellungen erforderlich, a priori eine maximale Anzahl von

Beobachtungen m_0 vorzugeben. "Truncation of any sequential test which may occasionally require a large number of observations is often necessary on practical grounds, even though the test possesses a small ASN for all θ . This is so, for instance, in industrial experiments where observing x_i by nature implies a long waiting time or the destruction of an expensive item. This is also true in many clinical trials where medical ethics forbid continuation of an experiment with some new drug as soon as the nature of the drug becomes apparent, even though a formal statistical test does not fully establish this." (Ghosh, 1970, S. 221)

Für die ersten m_0 Beobachtungen wird der SPRT genau wie in Abschnitt 3.2 beschrieben durchgeführt und gelangt u.U. zu einem Ergebnis zugunsten von H_0 oder H_1 . Ist jedoch nach der m_0 -ten Beobachtung $p_{1m_0}/p_{0m_0} \in R_{m_0}$, so wäre eine $(m_0 + 1)$ -te Beobachtung erforderlich. Für diesen Fall muß daher a priori eine Regel vorgegeben werden, die einem eine eindeutige Entscheidung zugunsten von H_0 oder H_1 nach spätestens m_0 Stichproben ermöglicht.

Da die Fehlerwahrscheinlichkeiten α und β in jedem Falle echt kleiner 0.5 gewählt werden, ergibt sich aus (3.2.16) und (3.2.17) $0 < B < 1 < A$ bzw. im Falle von logarithmierten Likelihood-Quotienten Z_i (vgl. Gleichung (3.2.10)) $b = \log(B) < 0 < \log(A) = a$.

Ist nunmehr $B < p_{1m_0}/p_{0m_0} < A$ bzw. $b < Z_{m_0} < a$, so trifft man i.a. die Regelung, den Test mit der Annahme von H_0 zu beenden, wenn

$$(3.7.22) \quad \frac{p_{1m_0}}{p_{0m_0}} \leq 1$$

bzw.

$$(3.7.23) \quad Z_{m_0} \leq 0$$

gilt. Entsprechend wird der Test mit der Annahme der Alternativhypothese H_1 beendet, falls

$$(3.7.24) \quad \frac{p_{1m_0}}{p_{0m_0}} > 1$$

bzw.

$$(3.7.25) \quad Z_{m_0} > 0$$

gilt.

Erzwingt man einen Abbruch des Tests nach der m_0 -ten Beobachtung, so werden sich die Fehlerwahrscheinlichkeiten verändern. Betrachtet man die Testgröße Z_{m_0} , so läßt sich die Wahrscheinlichkeit, daß Z_{m_0} in dem Intervall $]k_1, k_2]$ liegt, approximativ wie folgt darstellen:

$$(3.7.26) \quad P(k_1 < Z_{m_0} \leq k_2 \mid \underline{\theta}_1) \approx \Phi \left\{ \frac{k_2 - m_0 \cdot E(Z; \underline{\theta}_1)}{\sqrt{m_0} \cdot \sigma(Z; \underline{\theta}_1)} \right\} - \Phi \left\{ \frac{k_1 - m_0 \cdot E(Z; \underline{\theta}_1)}{\sqrt{m_0} \cdot \sigma(Z; \underline{\theta}_1)} \right\}$$

$$\text{für } l = 0, 1 \quad \text{mit } \sigma(Z; \underline{\theta}_1) = \sqrt{\text{Var}(Z; \underline{\theta}_1)}$$

Es treffe die Nullhypothese H_0 zu. Nach der m_0 -ten Beobachtung erhalte man jedoch das Ergebnis $0 < Z_{m_0} < a$, so daß man fälschlicherweise die Alternativhypothese H_1 annimmt, d.h. man begeht einen Fehler erster Art. Dieser Fehler werde im folgenden mit $\alpha(m_0)$ bezeichnet, da er u.U. darauf zurückzuführen ist, daß man die Stichprobenerhebung bereits nach der m_0 -ten Beobachtung abbricht. Der tatsächliche α -Fehler ist nunmehr höchstens gleich der Summe aus dem vorgegebenem α -Fehler und der Wahrscheinlichkeit, daß Z_{m_0} in das Intervall $]0, a[$ fällt. Somit ergibt sich:

$$(3.7.27) \quad \alpha(m_0) \leq \alpha + P(0 < Z_{m_0} < a \mid \underline{\theta}_0)$$

$$\approx \alpha + \Phi \left\{ \frac{a - m_0 \cdot E(Z; \underline{\theta}_0)}{\sqrt{m_0} \cdot \sigma(Z; \underline{\theta}_0)} \right\} - \Phi \left\{ \frac{-m_0 \cdot E(Z; \underline{\theta}_0)}{\sqrt{m_0} \cdot \sigma(Z; \underline{\theta}_0)} \right\}$$

Die Obergrenze für $\alpha(m_0)$, d.h. die rechte Seite von (3.7.27) werde im folgenden mit $\bar{\alpha}(m_0)$ bezeichnet.

Erhält man nach der m_0 -ten Beobachtung das Ergebnis $b < Z_{m_0} \leq 0$, so wird die Nullhypothese beibehalten. Trifft jedoch die Alternativhypothese H_1 zu, so begeht man einen Fehler zweiter Art, der im folgenden mit $\beta(m_0)$ bezeichnet wird. Somit ist der tatsächliche β -Fehler höchstens gleich der Summe aus dem vorgegebenen β -Fehler und der Wahrscheinlichkeit, daß Z_{m_0} in das Intervall $]b, 0]$ fällt. Somit erhält man:

$$(3.7.28) \quad \beta(m_0) \leq \beta + P(b < Z_{m_0} \leq 0 \mid \underline{\theta}_1)$$

$$\approx \beta + \Phi \left\{ \frac{-m_0 \cdot E(Z; \underline{\theta}_1)}{\sqrt{m_0} \cdot \sigma(Z; \underline{\theta}_1)} \right\} - \Phi \left\{ \frac{b - m_0 \cdot E(Z; \underline{\theta}_1)}{\sqrt{m_0} \cdot \sigma(Z; \underline{\theta}_1)} \right\}$$

Diese Obergrenze für $\beta(m_0)$, d.h. die rechte Seite von (3.7.28) werde im folgenden mit $\bar{\beta}(m_0)$ bezeichnet.

3.7.4 Der "Generalized Sequential Probability Ratio Test" (GSPRT)

Testet man die Hypothesen $H_0: \underline{\theta} = \underline{\theta}_0$ gegen $H_1: \underline{\theta} = \underline{\theta}_1$ und zieht man die Ausführungen über den durchschnittlich zu erwartenden Stichprobenumfang in Abschnitt 3.7.2 sowie die schematische Darstellung der ASN-Funktion (vgl. Abbildung 3.4) in Betracht, so erkennt man, daß der zu erwartende Stichprobenumfang überdurchschnittlich groß wird, wenn der wahre Wert des Parameters $\underline{\theta}$ echt zwischen $\underline{\theta}_0$ und $\underline{\theta}_1$ liegt.

"In particular, the sequential probability ratio test in many problems has an expected sample size function that is much higher for values of θ between θ_0 and θ_1 than for these two values. Between θ_0 and θ_1 presumably one is less interested in which of the two actions is taken, but here is where one has to take a large number of observations. For example, in one case considered below the expected number of observations goes up to about 5/3 of the number at θ_0 and θ_1 ; in another case it more than doubles.

The question is whether there are other sequential procedures which will reduce the expected number of observations for parameter values in the middle of the range without increasing it much at θ_0 and θ_1 ." (T. W. Anderson, 1960, S. 167)

Ein Verfahren, das zu einer Verringerung des zu erwartenden Stichprobenumfangs $ASN(\underline{\theta})$ im vorliegenden Fall beiträgt, ist der "Generalized Sequential Probability Ratio Test" (GSPRT). Der GSPRT wurde zuerst von Weiss (1953) definiert. Bei diesem Testverfahren wird die Überprüfung der Hypothesen H_0 und H_1 ganz analog zu den Ausführungen in Abschnitt 3.2 durchgeführt. Während jedoch beim SPRT die Größen A und B in Anlehnung an die Ungleichungen (3.2.16) und (3.2.17) einmal bestimmt werden und während des gesamten Tests unverändert bleiben, werden beim GSPRT a priori zwei Folgen von positiven Konstanten $(\bar{A}_1, \bar{A}_2, \dots)$ und $(\bar{B}_1, \bar{B}_2, \dots)$ so festgelegt, daß für alle i $\bar{A}_i \geq \bar{B}_i$ gilt. Hierbei ist auch $\bar{A}_1 = \infty$ zugelassen.

Genau wie beim SPRT kann keine Entscheidung getroffen werden, solange $\bar{B}_m < p_{1m}/p_{0m} < \bar{A}_m$ gilt. Ist hingegen $p_{1m}/p_{0m} \leq \bar{B}_m$, so wird die Nullhypothese H_0 angenommen und es wird die Alternativhypothese H_1 beibehalten, wenn $p_{1m}/p_{0m} \geq \bar{A}_m$ gilt.

Gilt für ein m_0 $\bar{A}_{m_0} = \bar{B}_{m_0}$, so muß spätestens nach der m_0 -ten Stichprobe entsprechend den Regeln aus Abschnitt 3.7.3 eine Entscheidung zugunsten von H_0 oder H_1 getroffen werden.

Weiss (1953) hat nachgewiesen, daß bei Verwendung des GSPRT die Fehlerwahrscheinlichkeiten α und β nicht größer werden können als bei dem entsprechenden SPRT und daß sich die Anzahl der zu erwartenden Stichproben $ASN(\underline{\theta})$ verringert. Weitere Eigenschaften des GSPRT wurden von Kiefer & Weiss (1957) aufgezeigt. Man erkennt, daß der SPRT im Grunde ein Spezialfall des GSPRT ist, den man erhält, wenn man $\bar{A}_i = A$ und $\bar{B}_i = B$ für alle i wählt.

Verwendet man den SPRT, so wird die Indifferenzzone durch zwei parallele Geraden mit den konstanten Funktionswerten A und B begrenzt. T.W. Anderson (1960) hat eine Verallgemeinerung dahingehend vorgenommen, daß die Indifferenzzone durch zwei Geraden gegeben ist, die jedoch nicht mehr parallel verlaufen, sondern konvergieren, d.h. man erhält

$$(3.7.29) \quad x(m) = c_1 + d_1 \cdot m \quad \text{mit } c_1 > 0 \quad \text{und } d_1 < 0$$

bzw.

$$(3.7.30) \quad x(m) = c_2 + d_2 \cdot m \quad \text{mit } c_2 < 0 \quad \text{und } d_2 > 0$$

Eine Entscheidung wird nunmehr nach denselben Kriterien wie beim SPRT getroffen, d.h. es wird H_0 verworfen, falls

$p_{1m}/p_{0m} \geq c_1 + d_1 \cdot m$ gilt bzw. es wird H_0 beibehalten, falls

$p_{1m}/p_{0m} \leq c_2 + d_2 \cdot m$ gilt und falls sich

$c_2 + d_2 \cdot m < p_{1m}/p_{0m} < c_1 + d_1 \cdot m$ ergibt, so ist eine $(m + 1)$ -te Beobachtung erforderlich. Da die beiden Geraden bei

$m^* = (c_1 - c_2)/(d_2 - d_1)$ einen Schnittpunkt besitzen, muß zur Vermeidung von Widersprüchen eine maximale Beobachtungszahl m_0 so vorgegeben werden, daß die Ungleichung

$$(3.7.31) \quad c_2 + d_2 \cdot (m_0 - 1) < c_1 + d_1 \cdot (m_0 - 1)$$

erfüllt ist.

Der sequentielle Test von T.W. Anderson wurde noch einmal von Baruah & Bhattacharjee (1980) modifiziert. Bis zu einer bestimmten vorgegebenen Anzahl von Stichproben τ wählen sie das beschriebene Verfahren von T.W. Anderson (1960). Gilt

$c_2 + d_2 \cdot \tau < p_{1\tau}/p_{0\tau} < c_1 + d_1 \cdot \tau$, so wird jedoch nicht wie bei T.W. Anderson (1960) der Test abgebrochen und eine Entscheidung nach den in Abschnitt 3.7.3 dargestellten Kriterien getroffen, sondern die Indifferenzzone wird durch die beiden neuen Geraden

$$(3.7.32) \quad x(m) = c_1^* + d_1^* \cdot m \quad \text{mit } 0 < c_1^* < c_1 \quad \text{und } d_1 < d_1^* < 0$$

sowie

$$(3.7.33) \quad x(m) = c_2^* + d_2^* \cdot m \quad \text{mit } c_2 < c_2^* < 0 \quad \text{und } d_2 > d_2^* > 0$$

begrenzt. Selbstverständlich muß τ so gewählt werden, daß die Bedingung $c_2 + d_2 \cdot \tau < c_1 + d_1 \cdot \tau$ erfüllt ist. Darüberhinaus muß genau wie bei T.W. Anderson (1960) eine maximale Beobachtungszahl $T > \tau$ so vorgegeben werden, daß

$$(3.7.34) \quad c_2^* + d_2^* \cdot (T - 1) < c_1^* + d_1^* \cdot (T - 1)$$

gilt. Die diskutierte Vorgehensweise ist in Abbildung 3.5 veranschaulicht.

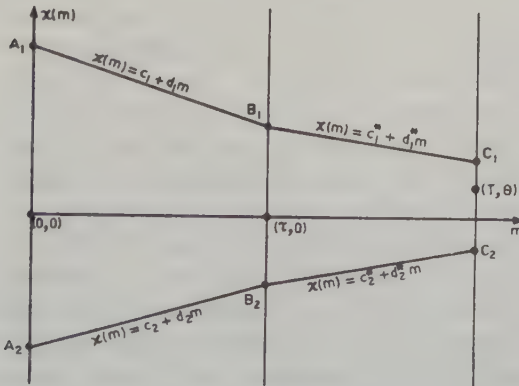


Abb. 3.5: Schematische Darstellung des sequentiellen Testverfahrens von Baruah & Bhattacharjee (aus: Baruah & Bhattacharjee, 1980, S. 199)

4. Empirische Untersuchung

4.1 Beschreibung des Datenmaterials

Die Zentralmensa der Universität Oldenburg bietet seit Beginn des WS 83/84 jeweils an Werktagen von 12.00 bis 14.00 Uhr vier verschiedene Gerichte an.

Mit der Einführung des Alternativessens entsprach das Studentenwerk dem in einer Mensa-Umfrage vielfach geäußerten Wunsch nach einer vollwertigen, fleischlosen Ernährung. Genau wie das Alternativessen setzt sich das Menü aus festen Komponenten zusammen und die Bezahlung beider Gerichte erfolgt über Essensmarken. Ein weiteres Angebot ist das Auswahlen, das vom Essensteilnehmer beliebig aus verschiedenen Komponenten zusammengestellt werden kann. Darüberhinaus stellt das Tellergericht eine preiswerte Komponente des Auswählens dar.

Da es sich bei den Absatzzahlen der Mensa um sequentiell anfallende Daten handelt, führt ihre Auswertung mit Hilfe eines regressionsanalytischen Ansatzes in der Regel zu verzerrten Parameterschätzungen; hierauf wurde bereits in Abschnitt 1.5 hingewiesen. Aus diesem Grunde sollen im folgenden die betrachteten Verkaufszahlen jeweils mit Hilfe eines zeitreihenanalytischen Ansatzes ausgewertet werden. Da die ARIMA-Methodologie die Unabhängigkeit und Normalverteilung der Residuen liefert sowie die Parametersparsamkeit gewährleistet, soll diese zeitreihenanalytische Technik im folgenden angewendet werden. Eine wesentliche Voraussetzung hierfür ist jedoch, daß die Äquidistanz der Daten sichergestellt ist. Diese Bedingung ist allerdings bei keinem der vorliegenden Datensätze vollständig erfüllt. So wird ein Teil der betrachteten Gerichte während der vorlesungsfreien Zeiten nicht ausgegeben. Jedoch stellen auch die Verkaufszahlen der durchgängig angebotenen Mahlzeiten keine vollständig äquidistanten Zeitreihen dar, da die Mensa sowohl an den Wochenenden als auch an den Feiertagen geschlossen ist.

Da die Äquidistanz der Daten nicht gegeben ist, muß davon ausgegangen werden, daß für jeden Datensatz die Analyse aller vorhandenen Daten, die sich teilweise sowohl auf die Vorlesungszeiten

als auch auf die vorlesungsfreien Zeiträume bezieht, nicht mehr mit Hilfe eines univariaten ARIMA-Modells möglich ist, da alle vier Zeitreihen erhebliche strukturelle Veränderungen aufweisen können. Dies gilt insbesondere für diejenigen Angebote, die während der vorlesungsfreien Zeiten nicht ausgegeben werden. Probleme sind jedoch auch bei den durchgängig angebotenen Gerichten zu erwarten, da davon ausgegangen werden muß, daß die durchschnittliche Anzahl der täglichen Nachfrager während der Ferienzeiten erheblich abnimmt. Darüberhinaus steht während der Semesterferien in der Zentralmensa für die Essensausgabe lediglich ein Aufgang zur Verfügung und es kann beobachtet werden, daß die Inanspruchnahme der Zentralmensa insbesondere kurz nach der Öffnung um 12.00 Uhr mit erheblichen Wartezeiten verbunden ist. Daher kann vermutet werden, daß ein Teil der potentiellen Nachfrager die Mensa nicht in Anspruch nimmt, sondern beispielsweise ein warmes Gericht in der Cafeteria zu sich nimmt.

Da fast alle vorgenannten Aspekte jeweils an die vorlesungsfreien Zeiten gebunden sind, wäre ihre Erfassung in einem Modell mit Hilfe von Dummy-Variablen möglich. Somit ist für die Beschreibung von allen vier Zeitreihen jeweils ein multiples Transfer-ARIMA-Modell (vgl. Box & Jenkins, 1970; Makridakis & Wheelwright, 1978a,b) erforderlich, in dem die einzelnen exogenen Einflußgrößen Dummy-Variable sind, d.h. man erhält jeweils ein Interventionsmodell nach Box & Tiao (1975).

Die vorstehend dargestellte Struktur der Daten erfordert daher die definitorische Zusammenfassung der Absatzzahlen der einzelnen Angebote aus den betrachteten Vorlesungszeiten zu jeweils einer Zeitreihe, wobei per definitionem jede Woche durch den Zeitraum Montag bis Freitag repräsentiert wird. Somit entspricht für $t \geq 6$ der Zeitreihenwert y_t nicht mehr dem t -ten Tag des der Untersuchung zugrundeliegenden Zeitraumes.

Die Daten für die Angebote der Mensa liegen seit dem WS 83/84 bis einschließlich des SS 85 vor. In Tabelle 4.1 sind die Vorlesungszeiten dieser Semester aufgelistet.

Tab. 4.1: Anzahl der Beobachtungstage für den Zeitraum
WS 83/84 bis SS 85

<u>Semester</u>	<u>Vorlesungszeit</u>	<u>Tage</u>
WS 83/84	17.10.83 - 10.02.84	75
SS 84	30.04.84 - 20.07.84	60
WS 84/85	22.10.84 - 15.02.85	75
SS 85	15.04.85 - 12.07.85	65

Die Daten der Vorlesungszeiten der vier betrachteten Semester werden im folgenden jeweils definitorisch zu einer Zeitreihe mit insgesamt 275 Werten zusammengefaßt; so entspricht beispielsweise der 75. Wert einer jeden solchen Reihe Freitag, dem 10.02.84, während der 76. Wert jeweils Montag, den 30.04.84 und nicht etwa Montag, den 13.02.84, repräsentiert. Diese Vorgehensweise ist nicht unproblematisch und kann u.U. zu Verzerrungen führen. Es kann durchaus vorkommen, daß man unterschiedliche ARIMA-Modelle erhält, wenn man für jede der einzelnen Vorlesungszeiten eines Datensatzes getrennt einen ARIMA-Prozeß ermittelt. Hierauf wird noch einmal im Zusammenhang mit der Bestimmung der ARIMA-Modelle in Abschnitt 4.2.1 eingegangen.

Die in Tabelle 4.1 aufgelisteten Vorlesungszeiten enthalten Feiertage, die nicht einfach vernachlässigt werden dürfen, da ansonsten auch innerhalb der definitorisch festgelegten Zeitreihen die erforderliche Äquidistanz der Daten nicht gegeben wäre. Somit ist es notwendig, für die Feiertage Absatzzahlen zu prognostizieren, und es erhebt sich die Frage, welches Prognoseverfahren für diesen Zweck geeignet erscheint. Hierzu bemerken Makridakis & Wheelwright (1978a, S. 618): "In such cases, either certain observations must be dropped completely or some estimate must be made of the missing values so that complete observation can be included. Usually, if the number of missing values is small, it is better to use some kind of moving average or exponential smoothing estimate of the missing value and include the observation than it is to drop it. However, if there are several missing values, it may be better to estimate one or more of the

independent variables or several of observations in order to achieve more accurate results." Die Anzahl der Feiertage in den der Untersuchung zugrundeliegenden Zeiträumen ist gering, da die Vorlesungszeiten der betrachteten Wintersemester lediglich den Buß- und Betttag als Feiertag enthalten und die Vorlesungszeiten der betrachteten Sommersemester drei bzw. vier Feiertage umfassen. Daher werden von uns die hypothetisch angenommenen Verkaufszahlen für diese Tage mit Hilfe des in Abschnitt 1.3 dargestellten Verfahrens der exponentiellen Glättung erster Ordnung nach Brown (1959, 1963) prognostiziert. Hierbei wird $\alpha = 0.75$ gewählt, d.h. die vergangenen Beobachtungszahlen x_t werden zu 75% sowie die Prognosewerte S_t zu 25% berücksichtigt, und man erhält die in Tabelle 4.2 aufgelisteten Absatzzahlen.

Tab. 4.2: Prognostizierte Absatzzahlen für die Feiertage in der Vorlesungszeit

Semester	Feiertage in der Vorlesungszeit	Tagesnummer t	Prognostizierte Werte S_t für			
			Auswahl-essen	Tellergericht	Menü	Alternativessen
WS 83/84	16.11.83	23	1394	537	1131	418
SS 84	1.05.84	77	1485	619	647	467
	31.05.84	99	1236	791	752	524
	11.06.84	106	1395	452	572	455
WS 84/85	21.11.84	158	1647	527	1128	576
SS 85	1.05.85	223	1916	508	730	868
	16.05.85	234	1571	878	725	551
	27.05.85	241	1450	439	640	623
	17.06.85	256	1692	854	647	573

Sowohl das Auswahlessen als auch das Tellergericht müssen an den Ausgabekassen bar bezahlt werden.

Für die Angebote Menü, Alternativessen und Tellergericht gilt gemeinsam, daß sie jeweils aus festen Komponenten bestehen und zu einem konstanten Preis ausgegeben werden. Daher lassen Prognosen für die drei vorgenannten Komponenten Rückschlüsse sowohl auf die zu erwartenden Einnahmen als auch die zukünftige Anzahl der Essensteilnehmer zu.

Hingegen ist das Auswahlessen sowohl von der "Menge" als auch von der Zusammensetzung her nicht mit den obigen Angeboten vergleichbar, da eine individuelle Zusammenstellung möglich ist und sich deshalb kein konstanter Preis angeben läßt. Somit erlaubt eine Prognose für die Komponente Auswahlessen bestenfalls Aussagen über die zu erwartende Anzahl von Essensteilnehmern.

Aus Tabelle 4.1 geht hervor, daß die Anzahl der Beobachtungstage in den einzelnen Semestern zwischen 60 und 75 variiert. Nach Jenkins (1979, S. 26f) sollten daher die Daten "normalisiert" werden; d.h. es werden die Zeitreihendaten mit dem Faktor $1/T$ ($T = 275$) gewichtet.

Die "Normalisierung" bewirkt eine "erhebliche" Reduzierung der u.U. erhöhten Gesamtvarianz der Rohdaten. Hierauf soll im folgenden eingegangen werden. Besteht eine Zeitreihe mit T Daten aus n Gruppen, die alle denselben Umfang $t_i = \frac{T}{n}$ ($1 \leq i \leq n$) haben, so gilt für die Gesamtvarianz:

$$(4.1.1) \quad \sigma_y^2 = \frac{1}{t_1 + \dots + t_n} \cdot \sum_{i=1}^T y_i^2 - \bar{y}^2 = \frac{1}{n \cdot \frac{T}{n}} \cdot \sum_{i=1}^T y_i^2 - \bar{y}^2$$

Für (4.1.1) erhält man die Darstellung:

$$(4.1.2) \quad \sigma_y^2 = \frac{1}{n} \cdot \left\{ \frac{1}{t_1} \cdot \sum_{i=1}^{t_1} y_i^2 + \dots + \frac{1}{t_n} \cdot \sum_{i=t+1}^T y_i^2 \right\} - \left\{ \frac{1}{T} \cdot \sum_{i=1}^T y_i \right\}^2$$

Somit folgt:

$$\begin{aligned}
 (4.1.3) \quad \sigma_y^2 &= \frac{1}{n} \cdot \left\{ \frac{1}{t_1} \cdot \sum_{i=1}^{t_1} y_i^2 + \dots + \frac{1}{t_n} \cdot \sum_{i=\tau+1}^T y_i^2 \right\} \\
 &\quad - \frac{1}{n} \cdot \left\{ \frac{1}{n \cdot \left(\frac{T}{n}\right)^2} \cdot \left\{ \sum_{i=1}^{t_1} y_i + \dots + \sum_{i=\tau+1}^T y_i \right\} \cdot \left\{ \sum_{i=1}^T y_i \right\} \right\} \\
 &= \frac{1}{n} \cdot \left\{ \frac{1}{t_1} \cdot \sum_{i=1}^{t_1} y_i^2 + \dots + \frac{1}{t_n} \cdot \sum_{i=\tau+1}^T y_i^2 \right\} \\
 &\quad - \frac{1}{n} \cdot \left\{ \frac{1}{n \cdot t_1^2} \cdot \left\{ \sum_{i=1}^{t_1} y_i \right\} \cdot \left\{ \sum_{i=1}^T y_i \right\} + \dots \right. \\
 &\quad \quad \quad \left. + \frac{1}{n \cdot t_n^2} \cdot \left\{ \sum_{i=\tau+1}^T y_i \right\} \cdot \left\{ \sum_{i=1}^T y_i \right\} \right\} \\
 &= \frac{1}{n} \cdot \left\{ \frac{1}{t_1} \cdot \sum_{i=1}^{t_1} y_i^2 - \bar{y}_1 \cdot \bar{y} + \dots + \frac{1}{t_n} \cdot \sum_{i=\tau+1}^T y_i^2 - \bar{y}_n \cdot \bar{y} \right\}
 \end{aligned}$$

Setzt man $\bar{y} = c_1 + \bar{y}_1$ für $1 \leq i \leq n$, so folgt:

$$\begin{aligned}
 (4.1.4) \quad \sigma_y^2 &= \frac{1}{n} \cdot \left\{ \frac{1}{t_1} \cdot \sum_{i=1}^{t_1} y_i^2 - \bar{y}_1 \cdot (c_1 + \bar{y}_1) + \dots \right. \\
 &\quad \quad \quad \left. + \frac{1}{t_n} \cdot \sum_{i=\tau+1}^T y_i^2 - \bar{y}_n \cdot (c_n + \bar{y}_n) \right\} \\
 &= \frac{1}{n} \cdot \left\{ \frac{1}{t_1} \cdot \sum_{i=1}^{t_1} y_i^2 - \bar{y}_1^2 + \dots + \frac{1}{t_n} \cdot \sum_{i=\tau+1}^T y_i^2 - \bar{y}_n^2 \right\} - \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n c_i \cdot \bar{y}_i \\
 &= \frac{1}{n} \cdot \left\{ \sigma_1^2 + \dots + \sigma_n^2 \right\} - \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n c_i \cdot \bar{y}_i
 \end{aligned}$$

Somit entspricht die Gesamtvarianz dem arithmetischen Mittel der Varianzen der einzelnen Teile der Zeitreihe, wenn alle Gruppen das gleiche arithmetische Mittel $\bar{y}$ besitzen, da in

diesem Falle $c_i = 0$ für $1 \leq i \leq n$ gilt; zu beträchtlichen Abweichungen von $\bar{y}$ kann es somit nur kommen, wenn die Mittelwerte der einzelnen Gruppen sich erheblich voneinander unterscheiden.

Umfassen die betrachteten Gruppen unterschiedlich viele Daten, so läßt sich die Gesamtvarianz σ_y^2 nicht mehr in jedem Falle eindeutig mit Hilfe der Varianzen der einzelnen Gruppen erklären und die Gesamtvarianz kann u.U. erheblich höher als das arithmetische Mittel der Varianzen der einzelnen Gruppen sein. Dies gilt insbesondere dann, wenn Teile der Zeitreihe mit einem relativ großen Umfang eine hohe Varianz und kleinere Gruppen eine niedrige Varianz besitzen, so daß letztendlich die höheren Varianzen dominieren.

Um die Gesamtvarianz zu verringern, wird daher die Gewichtung der Rohdaten mit dem Faktor $1/T$ vorgeschlagen. Für die Varianz der "normalisierten" Daten $z_t = \frac{1}{T} \cdot y_t$ gilt somit:

$$\begin{aligned}
 (4.1.5) \quad \sigma_z^2 &= \frac{1}{T} \cdot \sum_{i=1}^T z_i^2 - \bar{z}^2 = \frac{1}{T} \cdot \sum_{i=1}^T \left\{ \frac{y_i}{T} \right\}^2 - \left\{ \frac{1}{T} \cdot \sum_{i=1}^T \frac{y_i}{T} \right\}^2 \\
 &= \frac{1}{T^2} \cdot \left\{ \frac{1}{T} \cdot \sum_{i=1}^T y_i^2 - \bar{y}^2 \right\} = \frac{1}{T^2} \cdot \sigma_y^2
 \end{aligned}$$

Daher wird die u.U. erhöhte Gesamtvarianz der Rohdaten mit dem Faktor $1/T^2$ gewichtet und somit insbesondere bei großem T erheblich verringert.

Die Abbildungen 4.1 bis 4.4 zeigen die Originaldaten sowie die "normalisierten" Daten für die vier betrachteten Zeitreihen.

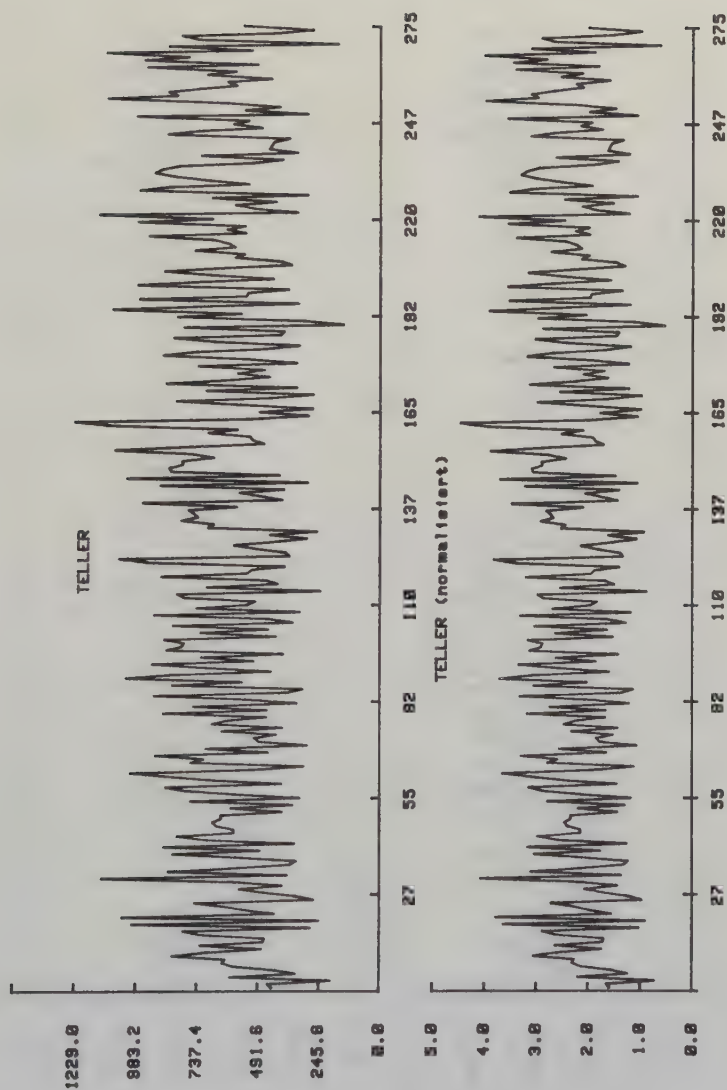


Abb. 4.1: Darstellung der Rohdaten sowie der "normalisierten" Zeitreihenwerte für das Angebot Tellergericht

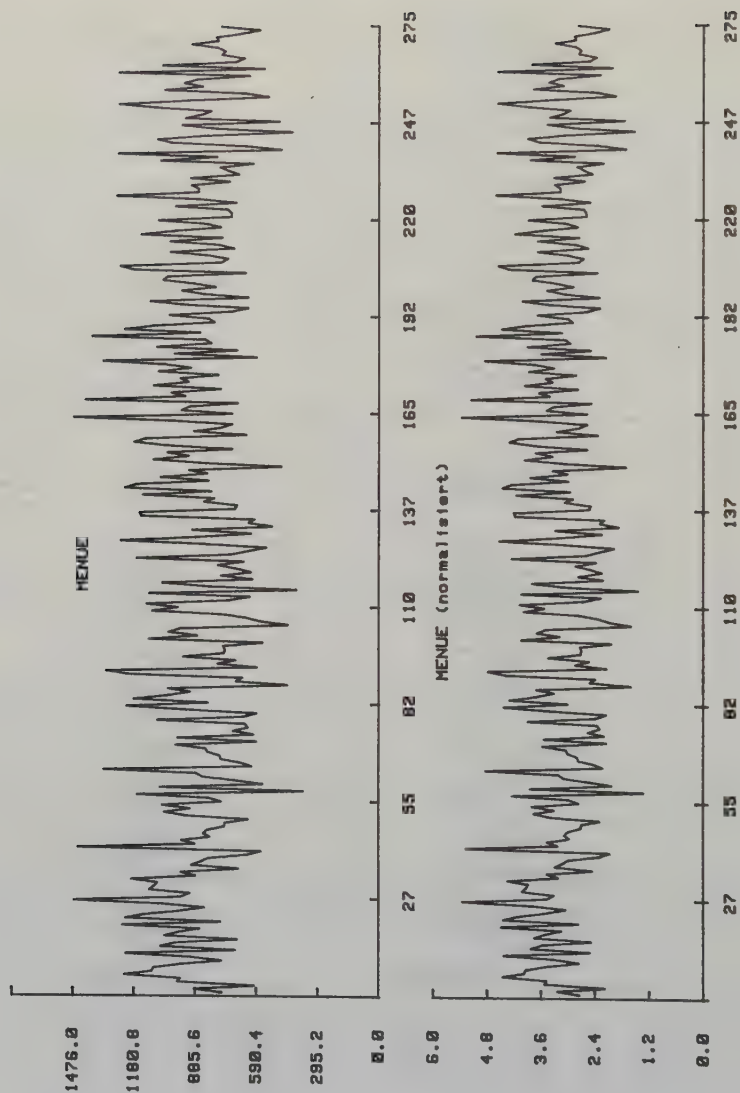


Abb. 4.2: Darstellung der Rohdaten sowie der "normalisierten" Zeitreihenwerte für das Angebot Menü

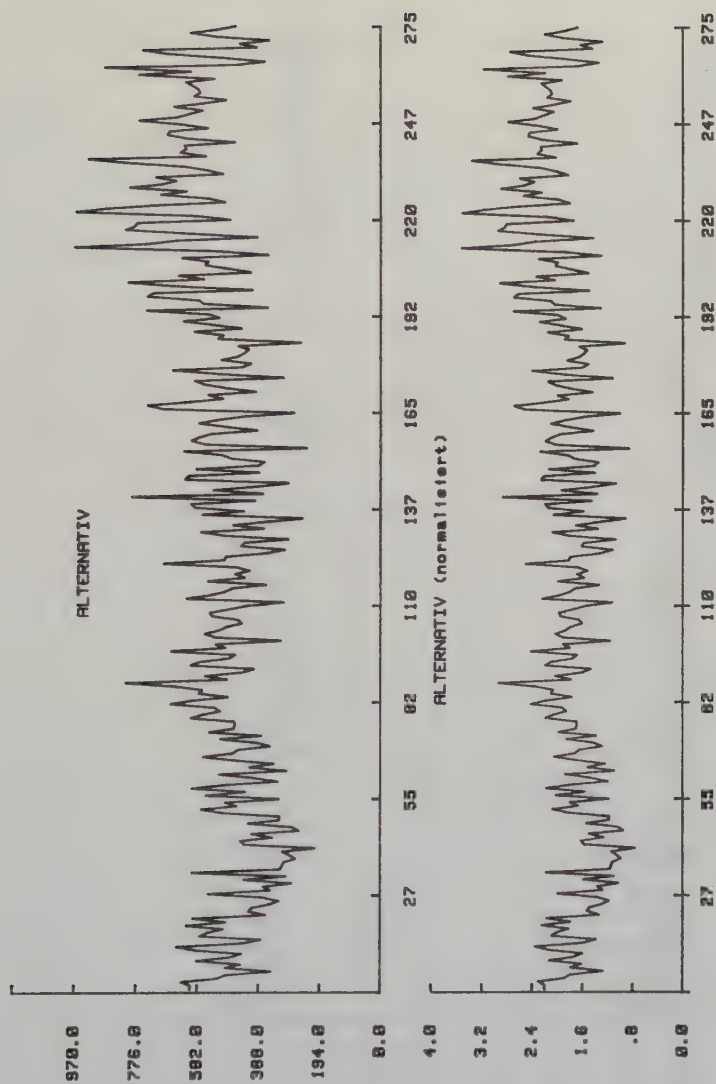


Abb. 4.3: Darstellung der Rohdaten sowie der "normalisierten" Zeitreihenwerte für das Angebot Alternativessen

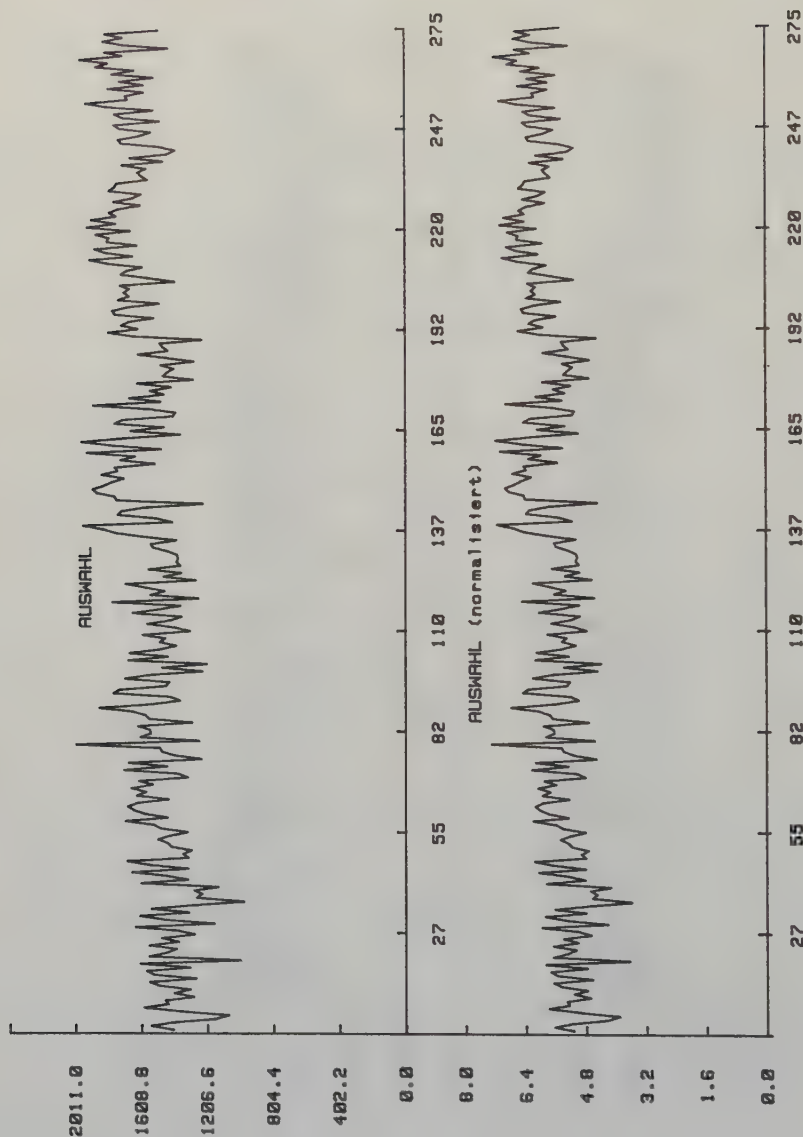


Abb. 4.4: Darstellung der Rohdaten sowie der "normalisierten" Zeitreihenwerte für das Angebot Auswählen

4.2 Datenanalyse unter Verwendung der ARIMA-Ansätze

Im folgenden soll von uns für jeden der in Abschnitt 4.1 dargestellten Datensätze eine Prognose mit Hilfe der Zeitreihenanalyse (vgl. Abschnitt 1.5) durchgeführt werden. Zu diesem Zweck wird zunächst für jede Zeitreihe auf der Basis der in Kapitel 2 skizzierten ARIMA-Modelle von Box & Jenkins (1970) ein univariates Modell bestimmt.

4.2.1 Vollautomatische Bestimmung der ARIMA-Modelle

Die Ermittlung des der jeweils betrachteten Zeitreihe zugrundeliegenden ARIMA-Ansatzes wird im folgenden in sämtlichen Schritten mit Hilfe der in Kapitel 3 hergeleiteten Testverfahren durchgeführt. Hierbei erfolgen sämtliche Phasen der Modellbestimmung - Identifikation, Parameterschätzung und Modelldiagnostik - vollautomatisch unter Verwendung des von uns entwickelten Programms "FITTING". Ein Ablaufschema für dieses Programm ist im Anhang wiedergegeben. Im Zusammenhang mit diesem Programm sei darauf hingewiesen, daß die Schätzung der Parameter nicht wie in Abschnitt 2.3 dargestellt mit Hilfe der globalen Verfahren erfolgt, sondern daß der von Göricke (1986) entwickelte rekursive Schätzalgorithmus RML zur Anwendung gelangt.

Im Rahmen der Modellbestimmung für die einzelnen Datensätze unter Verwendung des Programms "FITTING" werden für sämtliche durchzuführende Tests die Irrtumswahrscheinlichkeiten $\alpha = \beta = 0.01$ gewählt. Somit erhält man gemäß der in Abschnitt 3.2 dargestellten Regeln $A = 99$ und $B = 1/99$. Da in dem Programm der von Baruah & Bhattacharjee (1980) entwickelte und in Abschnitt 3.7.4 skizzierte GSPRT zur Anwendung gelangt und jede Zeitreihe $T = 275$ Daten umfaßt, erhält man für jeden Test als Grenzen der Indifferenzzone die in Abbildung 4.5 dargestellten Geraden. Hierbei beträgt die Breite der Indifferenzzone 80% von $A - B$ zum Zeitpunkt t_0 und 40% von $A - B$ zum Zeitpunkt T . Somit gilt $t_0 = 57$ und man erhält die Geradengleichungen

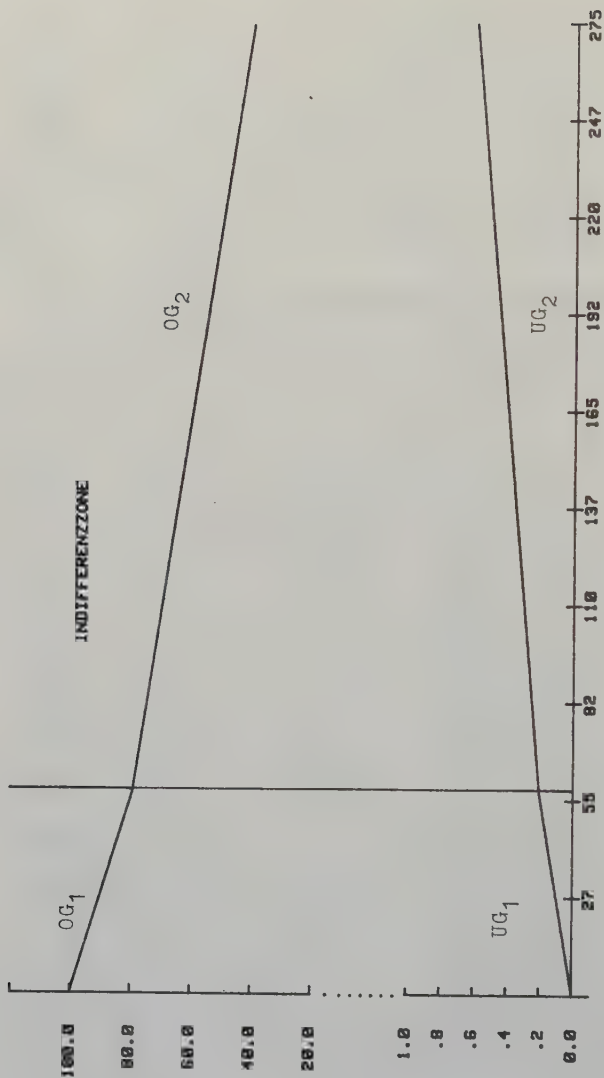


Abb. 4.5: Grenzen der Indifferenzzone bei Verwendung des GSPRT für $\alpha = \beta = 0.01$, $t_0 = 57$ und $T = 275$

$$(4.2.1) \quad \begin{aligned} OG_1(t) &= 100.0809 - 0.3603 \cdot t \\ UG_1(t) &= -0.0008 + 0.0036 \cdot t \end{aligned} \quad 1 \leq t \leq 57$$

sowie

$$(4.2.2) \quad \begin{aligned} OG_2(t) &= 89.8452 - 0.1805 \cdot t \\ UG_2(t) &= 0.1040 + 0.0018 \cdot t \end{aligned} \quad 57 \leq t \leq 275$$

Führt man für die vier "normalisierten" Datensätze sämtliche in Kapitel 3 dargestellten Tests mit Hilfe des Programms "FITTING" durch, so erhält man für die "normalisierten" und logarithmierten Daten des Angebots Tellergericht einen "white-noise"-Prozeß mit dem Level $\hat{L} = 0.74$ und dem Standardfehler $\hat{\sigma} = 0.023$.

Das Angebot Menü kann mit Hilfe eines $ARIMA(0,0,0) \times (2,0,0)_5$ -Modells erfaßt werden, d.h. es gilt:

$$(4.2.3) \quad (1 - \phi_5 B^5 - \phi_{10} B^{10})(y_t - L) = a_t$$

Sowohl das Alternativessen als auch die logarithmierten Daten des Angebots Auswahlen lassen sich jeweils mit Hilfe eines $ARIMA(0,1,1) \times (2,0,0)_5$ -Prozesses beschreiben, d.h. man erhält:

$$(4.2.4) \quad (1 - B)(1 - \phi_5 B^5 - \phi_{10} B^{10})(y_t - L) = (1 - \theta_1 B)a_t$$

Die Tabellen 4.3 bis 4.5 enthalten die den einzelnen Modellen entsprechenden Parameterschätzungen mit ihren Standardfehlern sowie die Werte der Ljung & Box-Statistik.

Tab. 4.3: Schätzergebnisse für das Angebot Menü

Parameter	Schätzungen	Standardfehler
L	3.20	0.0684
ϕ_5	0.13	0.0612
ϕ_{10}	0.19	0.0612
χ^2_{17}	18.700	

Tab. 4.4: Schätzergebnisse für das Alternativessen

Parameter	Schätzungen	Standardfehler
L	0.00	0.0059
θ_1	0.89	0.0611
ϕ_5	0.20	0.0613
ϕ_{10}	0.25	0.0376
χ^2_{17}	27.423	

Tab. 4.5: Schätzergebnisse für das Auswählen

Parameter	Schätzungen	Standardfehler
L	0.00	0.0022
θ_1	0.81	0.0706
ϕ_5	0.15	0.0686
ϕ_{10}	0.13	0.0491
χ^2_{17}	19.848	

Im Zusammenhang mit der Ermittlung der Saisonalität sei darauf hingewiesen, daß in allen vier Fällen die Intervalllänge $\lambda = 2$ gewählt wurde, d.h. es werden mit dem in Abschnitt 3.4.1 dargestellten Verfahren von Malý (1960) die folgenden 10 Hypothesen simultan getestet.

$$H_0: 20 \geq s > 18$$

$$H_1: 18 \geq s > 16$$

$$H_2: 16 \geq s > 14$$

$$H_3: 14 \geq s > 12$$

$$(4.2.5) \quad H_4: 12 \geq s > 10$$

$$H_5: 10 \geq s > 8$$

$$H_6: 8 \geq s > 6$$

$$H_7: 6 \geq s > 4$$

$$H_8: 4 \geq s > 2$$

$$H_9: 2 \geq s > 0$$

In allen Fällen wird die Hypothese H_7 angenommen, so daß das Verfahren von Armitage (1950) sich auf die Überprüfung der Hypothesen

$$(4.2.6) \quad H_0: s = 5$$

$$H_1: s = 6$$

mit Hilfe des SPRT begrenzt. Für alle vier Datensätze wird die Nullhypothese aus (4.2.6) beibehalten, d.h. es gilt $s = 5$. An dieser Stelle sei darauf hingewiesen, daß mit Hilfe des Programms "FITTING" lediglich eine saisonale Komponente ermittelt werden kann, obwohl insbesondere ökonomische Zeitreihen häufig mehrere sich überlagernde Zyklen enthalten. So wäre beispielsweise vorstellbar, daß die der Untersuchung zugrundeliegenden Mensa-Daten nicht nur einen wöchentlichen, sondern ebenfalls einen monatlichen Zyklus beinhalten, da die Essensteilnehmer i.a. über monatliche Einkünfte verfügen. Es kann jedoch davon ausgegangen werden, daß die für alle Datensätze ermittelte wöchentliche Saisonalität absolut dominierend ist. Dies erscheint u.a. deshalb plausibel, da beispielsweise viele potentielle Essensteilnehmer auf Grund des Wochenendes die Mensa montags und/oder freitags nicht in Anspruch nehmen werden, wenn sie montagsvormittags und/oder freitagnachmittags keine Lehrveranstaltungen

besuchen müssen. Auf klassische Verfahren zur Ermittlung von Saisonalitäten soll an dieser Stelle nicht näher eingegangen werden. Eine ausführliche Beschreibung der gängigsten Techniken zur Eliminierung von Saisonschwankungen und zur Ermittlung von Saisonzykluslängen findet man u.a. bei Rosentreter (1977, S. 288ff). Darüberhinaus existiert eine Vielzahl von zum Teil sehr verfeinerten Saisonbereinigungsverfahren. In diesem Zusammenhang sei lediglich auf die Methode der Deutschen Bundesbank (vgl. Deutsche Bundesbank, 1961), die Methode von Shiskin (vgl. Shiskin, 1957; Shiskin & Eisenpress, 1958), die Methode von Guirschick (vgl. Foote & Fox, 1952) sowie die Methode des Statistischen Amtes der Europäischen Gemeinschaft (vgl. Bongard, 1963) verwiesen. Weitere Beiträge, die sich mit der Problematik der Saisonbereinigung insbesondere bei ökonomischen Zeitreihen befassen, findet man bei Strigel (1978).

Die folgenden Tabellen 4.6 bis 4.9 enthalten die Testergebnisse für jeden der vier betrachteten Datensätze sowie die jeweils benötigte Datenmenge bis zu einer Testentscheidung und u.U. die Intervalle der erhöhten α -/oder β -Fehler.

Das Programm "FITTING" liefert für jede der vier analysierten Zeitreihen ein adäquates Modell. Im Zusammenhang mit der Adäquatheitsüberprüfung ist jedoch zu beachten, daß die autoregressiven Anteile des ermittelten Prozesses lediglich auf Stationarität überprüft werden, wenn $p = 1$ und/oder $P = 1$ gilt. Darüberhinaus wird nicht untersucht, ob die "Moving-Average"-Anteile invertierbar sind. Betrachtet man die in den Tabellen 4.3 bis 4.5 aufgelisteten Parameterschätzungen, so ergibt sich jedoch unmittelbar, daß in allen Fällen sowohl die Stationaritäts- als auch die Invertierbarkeitsbedingung erfüllt ist.

Tab. 4.6: Testergebnisse für das Angebot Tellergericht

Test	Ergebnis	Benötigte Datenmenge	Irrtumswahr- scheinlichkeit
Überprüfung auf Homogenität	Daten heterogen	54 Gruppen bzw. 270 Daten	$0.01 \leq \alpha \leq 0.24$
Ermittlung des nichtsaisonalen Differenzengrades	$d = 0$	36 Gruppen bzw. 108 Daten	$\beta = 0.01$
Bestimmung von s	$s = 5$		$\beta = 0.01$
Ermittlung des saisonalen Dif- ferenzengrades	$D = 0$	31 Gruppen bzw. 93 Daten	$\beta = 0.01$
Bestimmung der Modellparameter p und q	$p = 0$ $q = 0$		$\beta = 0.01$
Bestimmung der saisonalen Modell- parameter P und Q	$P = 0$ $Q = 0$		$\beta = 0.01$
Test auf Normal- verteilung der Residuen	Residuen normalver- teilt	37 Residuen	$\beta = 0.01$
Überprüfung der Erwartungswerte der Residuen	$E(a_t) = 0$	154 Residuen	$\beta = 0.01$

Tab. 4.7: Testergebnisse für das Angebot Menü

Test	Ergebnis	Benötigte Datenmenge	Irrtumswahr- scheinlichkeit
Überprüfung auf Homogenität	Daten homogen	54 Gruppen bzw. 270 Daten	$\beta = 0.01$
Ermittlung des nichtsaisonalen Differenzengrades	$d = 0$	29 Gruppen bzw. 87 Daten	$\beta = 0.01$
Bestimmung von s	$s = 5$		$\beta = 0.01$
Ermittlung des saisonalen Dif- ferenzengrades	$D = 0$	15 Gruppen bzw. 45 Daten	$\beta = 0.01$
Bestimmung der Modellparameter p und q	$p = 0$ $q = 0$		$\beta = 0.01$
Bestimmung der saisonalen Modell- parameter P und Q	$P = 2$ $Q = 0$		$\beta = 0.01$
Test auf Normal- verteilung der Residuen	Residuen normalver- teilt	25 Residuen	$\beta = 0.01$
Überprüfung der Erwartungswerte der Residuen	$E(a_t) = 0$	66 Residuen	$\beta = 0.01$

Tab. 4.8: Testergebnisse für das Alternativessen

Test	Ergebnis	Benötigte Datenmenge	Irrtumswahr- scheinlichkeit
Überprüfung auf Homogenität	Daten homogen	48 Gruppen bzw. 240 Daten	$\beta = 0.01$
Ermittlung des nichtsaisonalen Differenzengrades	$d = 1$	18 Gruppen bzw. 54 Daten	$\beta = 0.01$
Bestimmung von s	$s = 5$		$\beta = 0.01$
Ermittlung des saisonalen Dif- ferenzengrades	$D = 0$	16 Gruppen bzw. 48 Daten	$\beta = 0.01$
Bestimmung der Modellparameter p und q	$p = 0$ $q = 1$		$\beta = 0.01$
Bestimmung der saisonalen Modell- parameter P und Q	$P = 2$ $Q = 0$		$\beta = 0.01$
Test auf Normal- verteilung der Residuen	Residuen normalver- teilt	12 Residuen	$\beta = 0.01$
Überprüfung der Erwartungswerte der Residuen	$E(a_t) = 0$	15 Residuen	$\beta = 0.01$

Tab. 4.9: Testergebnisse für das Auswahlessen

Test	Ergebnis	Benötigte Datenmenge	Irrtumswahr- scheinlichkeit
Überprüfung auf Homogenität	Daten heterogen	54 Gruppen bzw. 270 Daten	$0.01 \leq \alpha \leq 0.24$
Ermittlung des nichtsaisonalen Differenzengrades	$d = 1$	11 Gruppen bzw. 33 Daten	$\beta = 0.01$
Bestimmung von s	$s = 5$		$\beta = 0.01$
Ermittlung des saisonalen Dif- ferenzengrades	$D = 0$	15 Gruppen bzw. 45 Daten	$\beta = 0.01$
Bestimmung der Modellparameter p und q	$p = 0$ $q = 1$		$\beta = 0.01$
Bestimmung der saisonalen Modell- parameter P und Q	$P = 2$ $Q = 0$		$\beta = 0.01$
Test auf Normal- verteilung der Residuen	Residuen normalver- teilt	28 Residuen	$\beta = 0.01$
Überprüfung der Erwartungswerte der Residuen	$E(a_t) = 0$	22 Residuen	$\beta = 0.01$

Eine Zeitreihe kann i.a. mit Hilfe von mehreren ARIMA-Modellen adäquat beschrieben werden. Da das Programm "FITTING" jedoch in jedem Falle nur ein Modell ermittelt, kann nicht sichergestellt werden, daß dieser ARIMA-Prozeß "optimal" ist. So existiert u.U. ein anderer adäquater ARIMA-Ansatz mit geringerer Fehlervarianz σ_a^2 und/oder das Prinzip der Parametersparsamkeit (vgl. Box & Jenkins, 1970, S. 17f) wird von diesem anderen Ansatz erfüllt.

In den bisherigen Ausführungen wurde für den Zeitraum WS 83/84 bis SS 85 für jedes Angebot der Mensa der Universität Oldenburg ein ARIMA-Modell für sämtliche jeweils zu einer Zeitreihe zusammengefaßten Vorlesungszeiten mit $T = 275$ Daten ermittelt. Betrachtet man die Vorlesungszeiten der einzelnen Semester separat, so ergeben sich teilweise andere adäquate Modellstrukturen. Man erhält beispielsweise für die Rohdaten des Tellergerichts für das SS 84 einen adäquaten $ARIMA(0,1,1)$ -Prozeß mit signifikantem Parameter $\hat{\theta}_1 = 0.92$ und ohne saisonale Komponente. Für das Angebot Menü ergibt sich für das WS 83/84 ein "white-noise"-Prozeß und für die Rohdaten des Alternativessens erhält man für das SS 85 einen $ARIMA(0,1,0) \times (0,1,1)_3$ -Prozeß mit dem signifikanten Parameter $\hat{\theta}_3 = 0.78$ und der nicht plausibel erscheinenden Saisonalität von $s = 3$ Tagen.

Die vorstehenden Ergebnisse stehen jedoch nicht im Widerspruch zu der in diesem Abschnitt angewandten Vorgehensweise, die Vorlesungszeiten der betrachteten Semester jeweils definitorisch zu einer Zeitreihe zusammenzufassen, da sich fast jede Zeitreihe i.a. mit Hilfe von mehreren ARIMA-Modellen adäquat beschreiben läßt. Darüberhinaus führen Glass, Willson & Gottman (1975) aus, daß sich die einzelnen Teile einer Zeitreihe ohne strukturelle Veränderungen jeweils adäquat mit Hilfe des für die gesamte Zeitreihe bestimmten ARIMA-Modells beschreiben lassen. Dies bestätigt sich auch, wenn man die Vorlesungszeiten der der Analyse zugrundeliegenden Semester separat betrachtet, jedoch sämtliche Parameter der für die einzelnen Gerichte insgesamt bestimmten Prozesse jeweils a priori vorgibt und nur die Adäquatheitstests durchführt.

4.2.2 Prognose mit Hilfe von ARIMA-Modellen

Im folgenden sollen auf der Basis der im vorigen Abschnitt bestimmten ARIMA-Modelle Prognosen durchgeführt werden. Betrachtet man das allgemeine ARIMA(p,d,q)x(P,D,Q)_s-Modell

$$\phi(B) \cdot \phi(B^s) \cdot (1 - B)^d \cdot (1 - B^s)^D \cdot (y_t - L) = \theta(B) \cdot \theta(B^s) \cdot a_t$$

und definiert

$$(4.2.7) \quad \gamma(B) := \phi(B) \cdot (1 - B)^d = (1 - \gamma_1 B - \dots - \gamma_{p+d} B^{p+d})$$

$$= 1 - \sum_{i=1}^{p+d} \gamma_i B^i$$

sowie

$$(4.2.8) \quad \Gamma(B^s) := \phi(B^s) \cdot (1 - B^s)^D = (1 - \Gamma_s B^s - \dots - \Gamma_{(P+D)s} B^{(P+D)s})$$

$$= 1 - \sum_{i=1}^{P+D} \Gamma_{is} B^{is},$$

so erhält man die Darstellung

$$(4.2.9) \quad (1 - \sum_{i=1}^{p+d} \gamma_i B^i) \cdot (1 - \sum_{i=1}^{P+D} \Gamma_{is} B^{is}) \cdot (y_t - L)$$

$$= (1 - \sum_{j=1}^q \theta_j B^j) \cdot (1 - \sum_{j=1}^Q \Theta_{js} B^{js}) \cdot a_t$$

bzw.

$$(4.2.10) \quad y_t = L + \left\{ \sum_{i=1}^{p+d} \gamma_i B^i + \sum_{i=1}^{P+D} \Gamma_{is} B^{is} - \left(\sum_{i=1}^{p+d} \gamma_i B^i \right) \left(\sum_{i=1}^{P+D} \Gamma_{is} B^{is} \right) \right\} \cdot (y_t - L)$$

$$+ \left\{ 1 - \sum_{j=1}^q \theta_j B^j - \sum_{j=1}^Q \Theta_{js} B^{js} + \left(\sum_{j=1}^q \theta_j B^j \right) \left(\sum_{j=1}^Q \Theta_{js} B^{js} \right) \right\} \cdot a_t$$

Soll nunmehr im Rahmen einer ex ante-Prognose ein Wert $\hat{y}_{T+1}$ bestimmt werden, so gilt

$$(4.2.11) \quad B^i \hat{y}_{T+1} = \begin{cases} y_{T+1-i} & , \text{ falls } T+1-i \leq T \\ \hat{y}_{T+1-i} & , \text{ falls } T+1-i > T \end{cases}$$

bzw.

$$(4.2.12) \quad B^j \hat{a}_{T+1} = \begin{cases} \hat{a}_{T+1-j} & , \text{ falls } T+1-j \leq T \\ 0 & , \text{ falls } T+1-j > T \end{cases}$$

Eine ausführliche Darstellung von Prognosen unter Verwendung von ARIMA-Modellen findet man u.a. bei Box & Jenkins (1970), Nelson (1973), O.D. Anderson (1976) sowie bei Granger & Newbold (1977). Andersen (1982) hat eine empirische Studie dieser Vorhersage-technik an Hand von 111 Zeitreihen vorgenommen. Quartalsmäßige Prognosen unter Verwendung eines ARIMA(0,1,1)x(0,1,1)-, eines ARIMA(1,0,0)x(0,1,0)- bzw. eines ARIMA(1,0,0)x(0,1,1)-Modells werden von Brown & Rozeff (1979) näher untersucht. Sie gelangen darüberhinaus zu dem Ergebnis, daß das zugrundegelegte ARIMA-Modell nach Möglichkeit insbesondere dann einen autoregressiven Anteil enthalten sollte, wenn für eine ökonomische Zeitreihe eine längerfristige Prognose vorgenommen werden soll:

"At longer horizons, the analyst behavior corresponded to the autoregressive time-series models, rather than the moving average model. If analysts are rational and behave according to the "true" underlying time-series model, this is evidence that the correct time-series model should incorporate an autoregressive parameter." (Brown & Rozeff, 1979, S. 349)

Soll für einen prognostizierten Wert $\hat{y}_{T+1}$ der zugehörige Prognosefehler $e_T(1)$ sowie dessen Varianz $\sigma_e^2(1)$, dessen Standardfehler $\sigma_e(1)$ und das entsprechende Konfidenzintervall ermittelt werden, so ist es erforderlich, den zugrundeliegenden ARIMA-Prozeß in der sogenannten ψ -Gewicht-Form zu schreiben. Diese Darstellungsform erhält man, wenn man das ARIMA(p,d,q)x(P,D,Q)_S-Modell nach $y_t - L$ auflöst, d.h. es gilt:

$$(4.2.13) \quad y_t - L = \frac{\theta(B^S) \cdot \theta(B)}{(1 - B^S)^D \cdot \phi(B^S) \cdot (1 - B)^d \cdot \phi(B)} \cdot a_t$$

Die rechte Seite von Gleichung (4.2.13) ist für $D + P + d + p > 0$ ein unendliches Polynom in B , d.h. das multiplikative ARIMA-Modell kann mit Hilfe eines unendlichen "Moving-Average"-Prozesses dargestellt werden. Schreibt man

$$(4.2.14) \quad \Psi(B) = \frac{\theta(B^S) \cdot \theta(B)}{(1 - B^S)^D \cdot \phi(B^S) \cdot (1 - B)^d \cdot \phi(B)},$$

so folgt:

$$(4.2.15) \quad y_t - L = \Psi(B) \cdot a_t$$

mit $\Psi(B) = \Psi_0 + \Psi_1 B + \Psi_2 B^2 + \dots$

Multipliziert man (4.2.15) mit $(1 - B^S)^D \cdot \phi(B^S) \cdot (1 - B)^d \cdot \phi(B)$, so gilt:

$$(4.2.16) \quad \theta(B^S) \cdot \theta(B) \cdot a_t = (1 - B^S)^D \cdot \phi(B^S) \cdot (1 - B)^d \cdot \phi(B) \cdot \Psi(B) \cdot a_t$$

Nunmehr lassen sich durch Koeffizientenvergleich die Gewichte Ψ_j bestimmen. Hierbei genügt es, die T Werte $\Psi_0, \Psi_1, \dots, \Psi_{T-1}$ zu ermitteln, da für $i \leq 0$ $a_i = E(a_i) = 0$ gesetzt wird.

In Gleichung (4.2.16) ist $(1 - B^S)^D \cdot \phi(B^S) \cdot (1 - B)^d \cdot \phi(B)$ ein Polynom vom Grade $D \cdot s + P \cdot s + d + p$. Für die Koeffizienten γ_k des Polynoms $(1 - B)^d \cdot \phi(B) = \gamma(B)$ ergibt sich (vgl. Glass, Willson & Gottman, 1975, S. 153):

$$(4.2.17) \quad \gamma_k = \sum_{r=0}^k \binom{d}{r} (-1)^r (-\phi_{k-r})$$

$$\text{mit } -\phi_0 = 1; \binom{d}{r} = 0 \text{ für } r > d; -\phi_{k-r} = 0 \text{ für } k-r > p.$$

In ganz analoger Weise lassen sich die Koeffizienten Γ_1 des Polynoms $(1 - B^S)^D \cdot \phi(B^S) = \Gamma(B^S)$ bestimmen.

Da auf Grund der Definition des Polynoms $\Phi(B^s)$ nur diejenigen Koeffizienten Γ_l ungleich Null sind, deren Index l ein ganzzahliges Vielfaches von der Länge s der Periode ist, erhält man die Darstellung (4.2.8).

Somit ergibt sich für diese Koeffizienten:

$$(4.2.18) \quad \Gamma_{ls} = \sum_{r=0}^l \binom{D}{r} (-1)^r (-\Phi_{ls-rs})$$

für $l = 0, 1, \dots, P+D$ sowie $\Gamma_j = 0$ für $j \neq ls$

und $-\Phi_0 = 1$; $\binom{D}{r} = 0$ für $r > D$; $-\Phi_{ls-rs} = 0$ für $ls-rs > Ps$

Nunmehr ergibt sich für die Koeffizienten $g_0, \dots, g_n$ mit $n = (P + D) \cdot s + p + d$ des Polynoms $(1 - B)^d \cdot \Phi(B) \cdot (1 - B^s)^D \cdot \Phi(B^s)$:

$$(4.2.19) \quad g_j = \sum_{i=0}^j \gamma_{j-i} \Gamma_i$$

Ebenso lassen sich die Koeffizienten $\alpha_0, \dots, \alpha_{Qs+q}$ des Polynoms $\Theta(B^s) \cdot \Theta(B)$ bestimmen:

$$(4.2.20) \quad \alpha_k = \sum_{j=0}^k \theta_{k-j} \Theta_j$$

Da sowohl in dem Polynom $\Theta(B^s)$ als auch in dem Polynom $\Theta(B)$ alle Koeffizienten θ_j und Θ_{ls} außer θ_0 und Θ_0 ein negatives Vorzeichen haben, erhält man mit (4.2.20) nur dann "korrekte" Ergebnisse, wenn man $\theta_0 = \Theta_0 = -1$ setzt. Desweiteren ist auf Grund der Definition des Polynoms $\Theta(B^s)$ $\theta_j = 0$, wenn j kein ganzzahliges Vielfaches von s ist.

Aus den vorstehenden Beziehungen ergibt sich unmittelbar:

$$\alpha_0 = \gamma_0 = \Gamma_0 = g_0 = 1$$

Aus (4.2.16) folgt:

$$(4.2.21) \quad \Theta(B^s) \cdot \Theta(B) = (1 - B^s)^D \cdot \Phi(B^s) \cdot (1 - B)^d \cdot \Phi(B) \cdot \Psi(B)$$

Somit erfüllen die α_k und g_j das nachstehende Gleichungssystem:

$$(4.2.22) \quad \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ g_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ g_2 & g_1 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_h & g_{h-1} & g_{h-2} & \dots & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \psi_0 \\ \psi_1 \\ \psi_2 \\ \vdots \\ \psi_h \end{bmatrix}$$

mit $\alpha_k = 0$ für $k > Q \cdot s + q$

Somit erhält man für die Berechnung der ψ 's die rekursive Beziehung:

$$(4.2.23) \quad \begin{aligned} \psi_0 &= 1 \\ \psi_h &= \alpha_h - \sum_{i=1}^h \psi_{h-i} g_i \end{aligned} \quad \text{für } h = 1, \dots, T-1$$

Mit Hilfe der ψ 's lassen sich nunmehr die Größen $e_T(1)$, $\sigma_e^2(1)$ sowie $\sigma_e(1)$ ermitteln, denn es gilt (vgl. Nelson, 1973. S. 159):

$$(4.2.24) \quad e_T(1) = \sum_{i=0}^{T-1} \psi_i e_{T-i},$$

$$(4.2.25) \quad \sigma_e^2(1) = \sigma_a^2 \cdot \sum_{i=0}^{T-1} \psi_i^2$$

sowie

$$(4.2.26) \quad \sigma_e(1) = \sigma_a \cdot \sqrt{\sum_{i=0}^{T-1} \psi_i^2}$$

Ist ein ARIMA-Modell für die logarithmisch transformierten Daten ly_t ermittelt worden, so gilt für die Rohdaten $y_t = \exp(ly_t)$. Sollen auf der Basis von logarithmisch transformierten Daten allerdings Prognosen erstellt werden, so ergibt sich jedoch (vgl. Nelson, 1973, S. 163):

$$(4.2.27) \quad \hat{y}_{T+1} = \exp(\hat{ly}_{T+1} + \frac{1}{2} \cdot \sigma_e^2(1))$$

Für die Varianz des Prognosefehlers $e_T^1(1) = y_{T+1} - \hat{y}_{T+1}$ gilt darüberhinaus:

$$(4.2.28) \quad \sigma_{e_T^1}^2(1) = \exp(2 \cdot ly_{T+1} + \sigma_e^2(1)) \cdot \{\exp(\sigma_e^2(1)) - 1\}$$

Obwohl $\Psi(B)$ für $P + D + p + d > 0$ ein unendliches Polynom in B ist, genügt es die Parameter Ψ_0 bis Ψ_{1-1} zu berechnen, um die vorstehenden Größen zu ermitteln.

Es sollen nunmehr Prognosen für die in Abschnitt 4.1 dargestellten Datensätze durchgeführt werden. Da das Angebot Tellergericht sich mit Hilfe eines "white-noise"-Prozesses beschreiben läßt, ergibt sich für die logarithmierten und "normalisierten" Daten:

$$(4.2.29) \quad \hat{y}_{T+1} = 0.74 + \hat{a}_{T+1}$$

Da für $l > 0$ gemäß (4.2.12) stets $\hat{a}_{T+1} = E(a_{T+1}) = 0$ gesetzt wird, folgt in jedem Falle $\hat{y}_{T+1} = 0.74$, d.h. es erfolgt die Prognose durch Fortschreibung des Levels. Aus diesem Grunde wird in den folgenden Betrachtungen das Angebot Tellergericht nicht berücksichtigt.

Die "normalisierten" Daten der Zeitreihe "Menü" gehorchen einem $ARIMA(0,0,0) \times (2,0,0)_5$ -Modell der Form (4.2.3), d.h. es gilt:

$$(4.2.30) \quad \hat{y}_{MN,T+1} = 2.176 + 0.13 \cdot \hat{y}_{MN,T+1-5} + 0.19 \cdot \hat{y}_{MN,T+1-10} + \hat{a}_{T+1}$$

Hierbei kennzeichnet $y_{MN,t} := \frac{1}{T} \cdot y_{M,t}$ die "normalisierten" Daten des Angebots Menü. Bestimmt man für den vorstehenden Prozeß die Ψ -Gewichte gemäß (4.2.23), so folgt:

$$(4.2.31) \quad \begin{aligned} \Psi_0 &= 1 \\ \Psi_{5j} &= \phi_5^j + \sum_{i=1}^j f_{i,j} \cdot \phi_5^{j-2i} \cdot \phi_{10}^i \end{aligned}$$

$$\text{mit } 1 = \lfloor j/2 \rfloor \quad \text{sowie } f_{i,j} = \sum_{k=2i}^j f_{i-1,k-2} \quad \text{mit } f_{0,j} = 0$$

und $\Psi_h = 0$ für $h \neq 5j$

In (4.2.31) ist $\lfloor x \rfloor$ die sogenannte "Größte-Ganze"-Funktion, d.h. jeder reellen Zahl x wird die größte ganze Zahl, die kleiner oder gleich x ist, zugeordnet (s.a. Barner & Flohr, 1974, S. 69).

Das Alternativessen läßt sich mit Hilfe eines ARIMA-Modells der Form (4.2.4) beschreiben. Bezeichnet $YAN_t := \frac{1}{T} \cdot Y A_t$ die "normalisierten" Daten des Angebots Alternativessen, so gilt:

$$(4.2.32) \quad \begin{aligned} \widehat{YAN}_{T+1} &= \widehat{YAN}_{T+1-1} + 0.20 \cdot (\widehat{YAN}_{T+1-5} - \widehat{YAN}_{T+1-6}) \\ &\quad + 0.25 \cdot (\widehat{YAN}_{T+1-10} - \widehat{YAN}_{T+1-11}) \\ &\quad + \hat{a}_{T+1} - 0.89 \cdot \hat{a}_{T+1-1} \end{aligned}$$

Für dieses Modell erhält man die Ψ -Gewichte:

$$(4.2.33) \quad \begin{aligned} \Psi_0 &= 1 \\ \Psi_j &= (1 - \theta_1) \cdot \sum_{i=0}^j \phi_5^i + \delta_{51,j} \cdot \theta_1 \cdot \phi_5^1 + (1 - \theta_1) \cdot \sum_{i=1}^{11} \phi_{10}^i \\ &\quad + \delta_{1011,j} \cdot \theta_1 \cdot \phi_{10}^{11} + (1 - \theta_1) \cdot \left\{ \sum_{i=1}^{1-2} i \cdot \phi_5^i \right\} \cdot \phi_{10} \\ &\quad + (\delta_{51,j} - \delta_{5,j}) \cdot \theta_1 \cdot (1 - 2) \cdot \phi_5^{1-2} \cdot \phi_{10} \\ &\quad + (1 - \theta_1) \cdot \sum_{k=2}^{12} \left\{ \sum_{i=1}^{1-2k} \left(\frac{i(i+1)}{2} + k - 1 \right) \cdot \phi_5^i \right\} \cdot \phi_{10}^k \\ &\quad + (\delta_{51,j} - \sum_{i=1}^4 \delta_{5i,j}) \cdot \theta_1 \cdot \left\{ \frac{(1-212)(1-212+1)}{2} + 12 - 1 \right\} \\ &\quad \cdot \phi_5^{1-212} \cdot \phi_{10}^{12} \end{aligned}$$

$$\text{mit } 1 = \lfloor j/5 \rfloor, \quad 11 = \lfloor j/10 \rfloor \quad \text{und } 12 = \lfloor (j-5)/10 \rfloor$$

In (4.2.33) ist $\delta_{i,j}$ das Kronecker-Symbol, d.h. es gilt:

$$(4.2.34) \quad \delta_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{falls } i = j \\ 0, & \text{falls } i \neq j \end{cases}$$

Da die "normalisierten" und logarithmierten Daten des Auswahl-
essens einem $\text{ARIMA}(0,1,1) \times (2,0,0)_5$ -Modell genügen, gilt:

$$(4.2.35) \quad \begin{aligned} \widehat{\text{YAWN}}_{T+1} = & \widehat{\text{YAWN}}_{T+1-1} + 0.15 \cdot (\widehat{\text{YAWN}}_{T+1-5} - \widehat{\text{YAWN}}_{T+1-6}) \\ & + 0.13 \cdot (\widehat{\text{YAWN}}_{T+1-10} - \widehat{\text{YAWN}}_{T+1-11}) \\ & + \hat{a}_{T+1} - 0.81 \cdot \hat{a}_{T+1-1} \end{aligned}$$

$$\text{mit } \text{YAWN}_t := \frac{1}{T} \cdot \text{YAW}_t$$

Da dieselbe Modellstruktur wie beim Alternativessen vorliegt,
lassen sich die zugehörigen Ψ -Gewichte ebenfalls gemäß (4.2.33)
bestimmen.

Führt man auf der Basis der vorstehend dargestellten Modelle
eine ex ante-Prognose für die ersten vier Vorlesungswochen des
WS 85/86, d.h. für den Zeitraum 21.10.85 bis 15.11.85, durch,
so erhält man für jedes der drei betrachteten Angebote die in
den Tabellen 4.10 bis 4.12 aufgelisteten 20 Prognosewerte sowie
die zugehörigen Prognosefehler gemäß (4.2.24) und deren Stan-
dardfehler gemäß (4.2.26), die sich jeweils auf die "normali-
sierten" Daten beziehen.

Tab. 4.10: Prognosen für die "normalisierten" Daten
des Angebots Menü

Datum	l	$\widehat{YMN}_{T+1}$	$e_T(l)$	$\sigma_e(l)$
21.10.85	1	2.9788	-0.2989	0.7619
22.10.85	2	3.0587	-0.2989	0.7619
23.10.85	3	2.9914	-0.2989	0.7619
24.10.85	4	2.9748	-0.2989	0.7619
25.10.85	5	3.1473	-0.2989	0.7619
28.10.85	6	3.0864	-0.3233	0.7682
29.10.85	7	3.1029	-0.3233	0.7682
30.10.85	8	3.0123	-0.3233	0.7682
31.10.85	9	2.9461	-0.3233	0.7682
1.11.85	10	3.0977	-0.3233	0.7682
4.11.85	11	3.1299	-0.2470	0.7794
5.11.85	12	3.1472	-0.2470	0.7794
6.11.85	13	3.1228	-0.2470	0.7794
7.11.85	14	3.1112	-0.2470	0.7794
8.11.85	15	3.1633	-0.2470	0.7794
11.11.85	16	3.1559	-0.2380	0.7802
12.11.85	17	3.1612	-0.2380	0.7802
13.11.85	18	3.1410	-0.2380	0.7802
14.11.85	19	3.1269	-0.2380	0.7802
15.11.85	20	3.1623	-0.2380	0.7802

Tab. 4.11: Prognosen für die "normalisierten" Daten
des Angebots Alternativessen

Datum	l	$\widehat{YAN}_{T+1}$	$e_T(l)$	$\sigma_e(l)$
21.10.85	1	1.7214	0.0155	0.4198
22.10.85	2	2.0035	-0.3756	0.8984
23.10.85	3	2.1330	-0.6569	1.1992
24.10.85	4	1.7392	-0.3833	1.4384
25.10.85	5	1.7454	-2.0738	1.6431
28.10.85	6	1.6681	-1.5313	1.8634
29.10.85	7	1.8829	-3.0577	2.0936
30.10.85	8	1.9816	-3.9606	2.3009
31.10.85	9	1.8242	-3.1213	2.4909
1.11.85	10	1.7721	-2.1951	2.6675
4.11.85	11	1.7679	-3.9440	2.8043
5.11.85	12	1.8825	-2.8932	2.9124
6.11.85	13	1.9351	-0.9934	3.0166
7.11.85	14	1.8039	-0.9014	3.1173
8.11.85	15	1.7950	0.4390	3.2149
11.11.85	16	1.7746	0.8396	3.3004
12.11.85	17	1.8520	1.1057	3.3763
13.11.85	18	1.8875	1.2646	3.4505
14.11.85	19	1.8213	1.0637	3.5231
15.11.85	20	1.8063	1.0619	3.5942

Tab. 4.12: Prognosen für die "normalisierten" Daten
des Angebots Auswahlessen

Datum	1	$\widehat{YAWN}_{T+1}$	$e_T(1)$	$\sigma_e(1)$
21.10.85	1	6.2693	-0.1358	0.6672
22.10.85	2	6.5265	-0.2294	1.4491
23.10.85	3	6.4629	-0.2533	1.9248
24.10.85	4	6.6945	-0.3727	2.4098
25.10.85	5	6.4260	-0.3857	2.6650
28.10.85	6	6.8456	0.0409	3.2367
29.10.85	7	7.0985	0.0999	3.7844
30.10.85	8	7.1794	0.1703	4.2347
31.10.85	9	7.4318	0.4804	4.7862
1.11.85	10	7.3595	0.3740	5.1249
4.11.85	11	7.6962	0.5824	5.7122
5.11.85	12	7.8864	0.6705	6.1779
6.11.85	13	7.9999	0.8425	6.5918
7.11.85	14	8.1904	1.0514	7.0782
8.11.85	15	8.2493	1.0974	7.4589
11.11.85	16	8.4825	1.2471	7.9949
12.11.85	17	8.6604	1.3217	8.4838
13.11.85	18	8.8005	1.4542	8.9471
14.11.85	19	8.9820	1.4313	9.4646
15.11.85	20	9.0928	1.4824	9.9191

Die Abbildungen 4.6 bis 4.8 zeigen die 65 Werte der betrachteten "normalisierten" Zeitreihen für das SS 85 sowie die prognostizierten Werte mit dem zugehörigen Konfidenzintervall. Hierbei gilt unter der Annahme der Normalverteilung der Residuen für das Konfidenzintervall eines Prognosewertes $\hat{y}_{T+1}$ auf dem 5%-Niveau (vgl. Nelson, 1973, S. 160):

$$(4.2.36) \quad \hat{y}_{T+1} - 1.96 \cdot \sigma_e(1) \leq \hat{y}_{T+1} \leq \hat{y}_{T+1} + 1.96 \cdot \sigma_e(1)$$

Liegen logarithmisch transformierte Daten vor, so ergibt sich:

$$(4.2.37) \quad \exp\{\hat{y}_{T+1} - 1.96 \cdot \sigma_e(1)\} \leq \exp\{\hat{y}_{T+1} + \frac{1}{2} \cdot \sigma_e^2(1)\} \\ \leq \exp\{\hat{y}_{T+1} + 1.96 \cdot \sigma_e(1)\}$$

bzw.

$$(4.2.38) \quad \frac{\exp\{\hat{y}_{T+1}\}}{\exp\{1.96 \cdot \sigma_e(1)\}} \leq \exp\{\hat{y}_{T+1} + \frac{1}{2} \cdot \sigma_e^2(1)\} \\ \leq \exp\{\hat{y}_{T+1}\} \cdot \exp\{1.96 \cdot \sigma_e(1)\}$$

Da $\sigma_e(1) \geq 0$ gilt, ist $\exp\{1.96 \cdot \sigma_e(1)\} \geq 1$ und man erhält für die logarithmisch transformierten Daten ein Konfidenzintervall, daß im Gegensatz zu (4.2.36) nicht mehr symmetrisch ist. Da in jedem Falle $\exp\{1.96 \cdot \sigma_e(1)\} \geq 1$ gilt, ist derjenige Teil des Konfidenzintervalls, der oberhalb des prognostizierten Wertes liegt i.a. sehr viel größer als derjenige Teil, der unterhalb des prognostizierten Wertes liegt. Dies wird besonders deutlich, wenn man Abbildung 4.8, die sich auf die Prognosen für die "normalisierten" Daten des Auswahlessens bezieht, betrachtet.

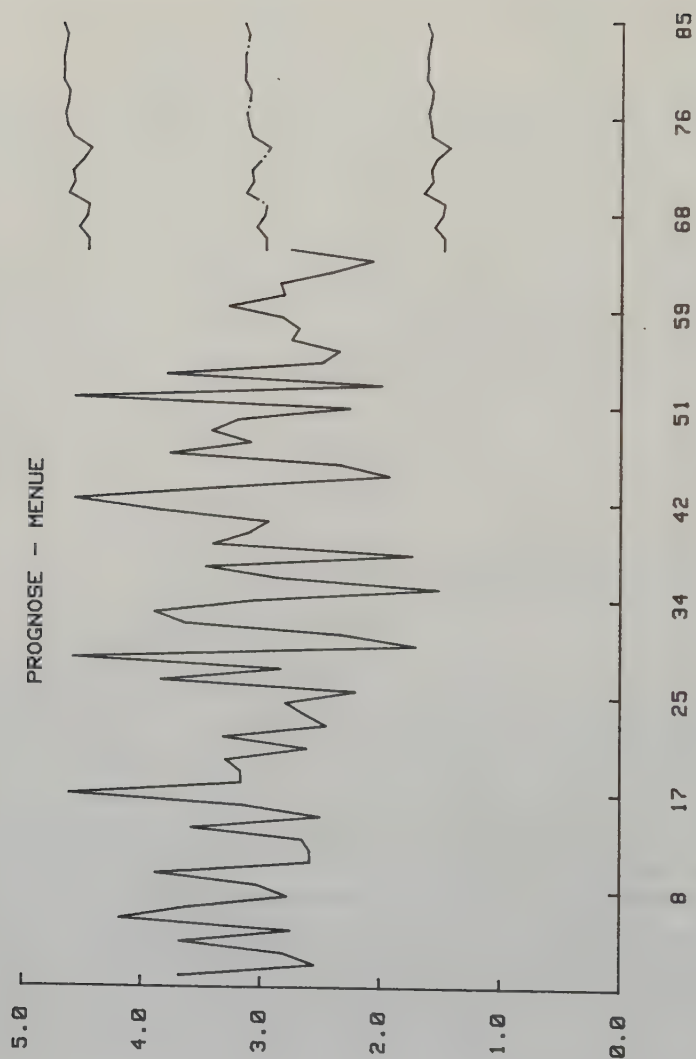


Abb. 4.6: Darstellung der Zeitreihenwerte für das SS 85 sowie von 20 Prognosewerten mit den zugehörigen Konfidenzintervallen für die "normalisierten" Daten des Angebots Menü

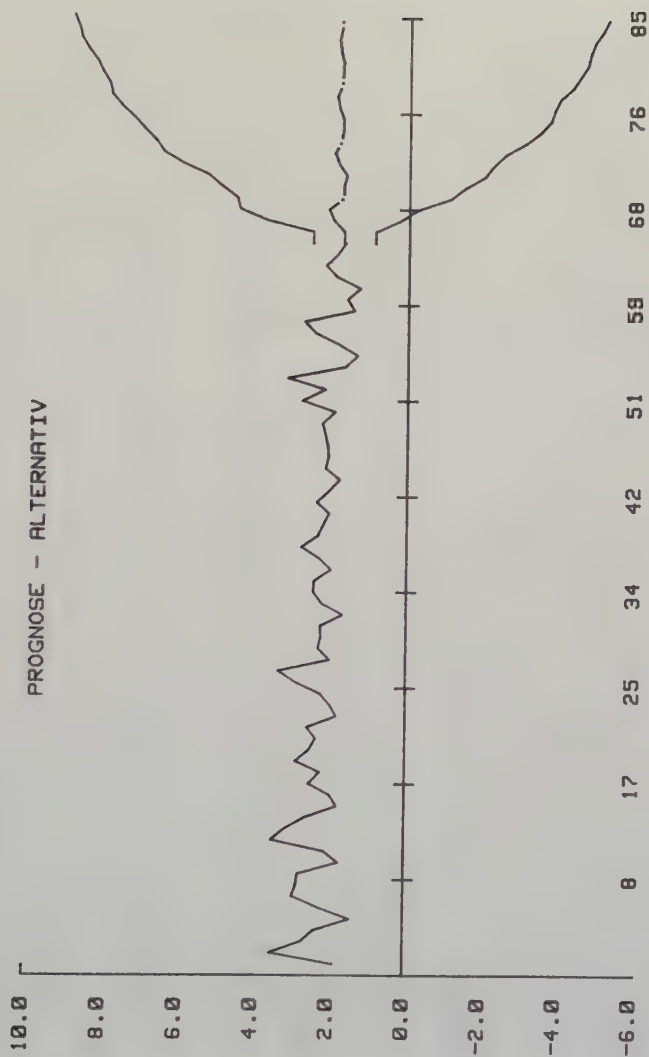


Abb. 4.7: Darstellung der Zeitreihenwerte für das SS 85 sowie von 20 Prognosewerten mit den zugehörigen Konfidenzintervallen für die "normalisierten" Daten des Angebots Alternativessen

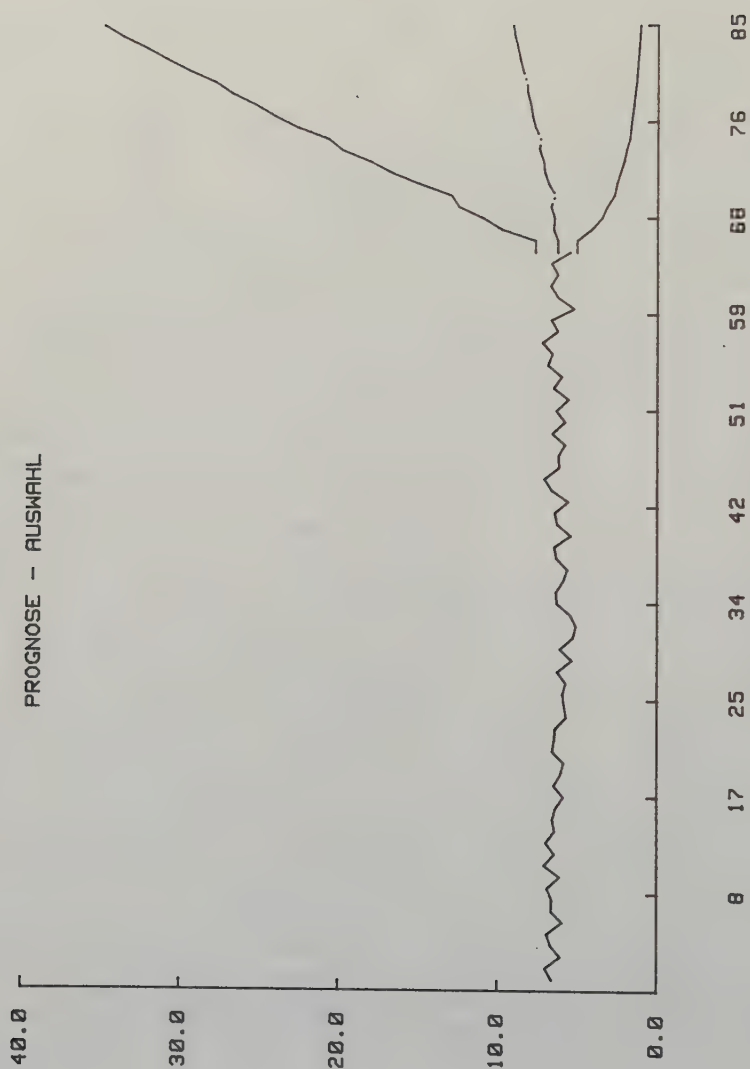


Abb. 4.8: Darstellung der Zeitreihenwerte für das SS 85 sowie von 20 Prognosewerten mit den zugehörigen Konfidenzintervallen für die "normalisierten" Daten des Angebots Auswählens

Die bisherigen Ausführungen bezogen sich ausschließlich auf die "normalisierten" Daten der einzelnen Angebote. Letztendlich interessieren jedoch die Prognosewerte für die Rohdaten. Man erhält sie, indem man die prognostizierten "normalisierten" Werte mit dem Faktor $T = 275$ gewichtet. Wie in Abschnitt 4.1 gezeigt wurde, ist die Varianz der "normalisierten" Daten die mit dem Faktor $1/T^2$ gewichtete Varianz der Rohdaten. Da dieselbe Aussage für die Residualvarianzen σ_a^2 gilt und sich die "Normalisierung" nicht auf die Berechnung der ψ -Gewichte auswirkt, gilt für die Varianz $\sigma_{er}^2(1)$ des Prognosefehlers der vorhergesagten Rohdaten gemäß (4.2.25):

$$(4.2.39) \quad \sigma_{er}^2(1) = T^2 \cdot \sigma_a^2 \cdot \sum_{i=0}^{1-1} \psi_i^2 = T^2 \cdot \sigma_e^2(1)$$

Somit lassen sich für die prognostizierten Rohdaten die Konfidenzintervalle bestimmen. Die vorhergesagten Rohdaten für den Zeitraum 21.10.85 bis 15.11.85, die Standardfehler der zugehörigen Prognosefehler sowie die Unter- und Obergrenzen der entsprechenden Konfidenzintervalle sind für die betrachteten Angebote in den Tabellen 4.13 bis 4.15 enthalten. Darüberhinaus zeigen die Abbildungen 4.9 bis 4.11 die 65 Werte der betrachteten Zeitreihen für das SS 85 sowie die prognostizierten Rohdaten mit dem zugehörigen Konfidenzintervall.

Wie aus den Abbildungen 4.7 und 4.10 zu ersehen ist, sind die Konfidenzintervalle sowohl für die "normalisierten" Werte als auch für die Rohdaten des Alternativessens symmetrisch. Die Untergrenzen dieser Intervalle sind für $l \geq 3$ jedoch negativ und dienen somit nur zur Veranschaulichung der theoretischen Struktur dieser Konfidenzintervalle, da der Untersuchung ausschließlich Absatzzahlen zugrundeliegen, die nicht negativ werden können.

Tab. 4.13: Prognosewerte und Konfidenzintervalle für die Rohdaten des Angebots Menü

Datum	1	$\hat{Y}_{M_{T+1}}$	$\sigma_{er}(1)$	Konfidenzintervall	
				Untergrenze	Obergrenze
21.10.85	1	1048	209.5225	637	1459
22.10.85	2	1231	209.5225	820	1642
23.10.85	3	1099	209.5225	688	1510
24.10.85	4	837	209.5225	426	1248
25.10.85	5	541	209.5225	130	952
28.10.85	6	985	211.2550	571	1399
29.10.85	7	1090	211.2550	676	1504
30.10.85	8	1110	211.2550	696	1524
31.10.85	9	1070	211.2550	656	1484
1.11.85	10	843	211.2550	429	1257
4.11.85	11	1061	214.3350	641	1481
5.11.85	12	1240	214.3350	820	1660
6.11.85	13	1068	214.3350	648	1488
7.11.85	14	1257	214.3350	837	1677
8.11.85	15	811	214.3350	391	1231
11.11.85	16	962	214.5550	541	1383
12.11.85	17	1223	214.5550	802	1644
13.11.85	18	864	214.5550	443	1285
14.11.85	19	1405	214.5550	984	1826
15.11.85	20	587	214.5550	166	1008

Tab. 4.14: Prognosewerte und Konfidenzintervalle für die Rohdaten des Angebots Alternativessen

Datum	l	$\hat{Y}_{A_{T+1}}$	$\sigma_{er}(l)$	Konfidenzintervall	
				Untergrenze	Obergrenze
21.10.85	1	473	115.4450	248	699
22.10.85	2	551	247.0600	68	1035
23.10.85	3	587	329.7800	-59	1233
24.10.85	4	478	395.5600	-297	1253
25.10.85	5	480	451.8525	-406	1366
28.10.85	6	459	512.4350	-545	1463
29.10.85	7	518	575.7400	-610	1646
30.10.85	8	545	632.7475	-695	1785
31.10.85	9	502	684.9975	-841	1845
1.11.85	10	487	733.5625	-951	1925
4.11.85	11	486	771.1825	-1026	1998
5.11.85	12	518	800.9100	-1052	2088
6.11.85	13	532	829.5650	-1094	2158
7.11.85	14	496	857.2575	-1184	2176
8.11.85	15	494	884.0975	-1239	2227
11.11.85	16	488	907.6100	-1291	2267
12.11.85	17	509	928.4825	-1311	2329
13.11.85	18	519	948.8875	-1341	2379
14.11.85	19	501	968.8525	-1398	2400
15.11.85	20	497	988.4050	-1440	2434

Tab. 4.15: Prognosewerte und Konfidenzintervalle für die
Rohdaten des Angebots Auswahlessen

Datum	l	$\widehat{YAW}_{T+1}$	$\sigma_{er}(l)$	Konfidenzintervall	
				Untergrenze	Obergrenze
21.10.85	1	1724	183.4800	1392	2111
22.10.85	2	1795	398.5025	1140	2693
23.10.85	3	1777	529.3200	962	3016
24.10.85	4	1841	662.6950	874	3433
25.10.85	5	1767	732.8750	748	3564
28.10.85	6	1883	890.0925	706	4105
29.10.85	7	1952	1040.7100	646	4591
30.10.85	8	1974	1164.5425	583	4962
31.10.85	9	2044	1316.2050	542	5451
1.11.85	10	2024	1409.3475	484	5696
4.11.85	11	2116	1570.8550	464	6226
5.11.85	12	2169	1698.9225	440	6624
6.11.85	13	2200	1812.7450	414	6960
7.11.85	14	2252	1946.5050	394	7366
8.11.85	15	2269	2051.1975	370	7656
11.11.85	16	2333	2198.5975	356	8100
12.11.85	17	2382	2333.0450	341	8491
13.11.85	18	2420	2460.4525	326	8848
14.11.85	19	2470	2602.7650	313	9250
15.11.85	20	2501	2727.7525	298	9582

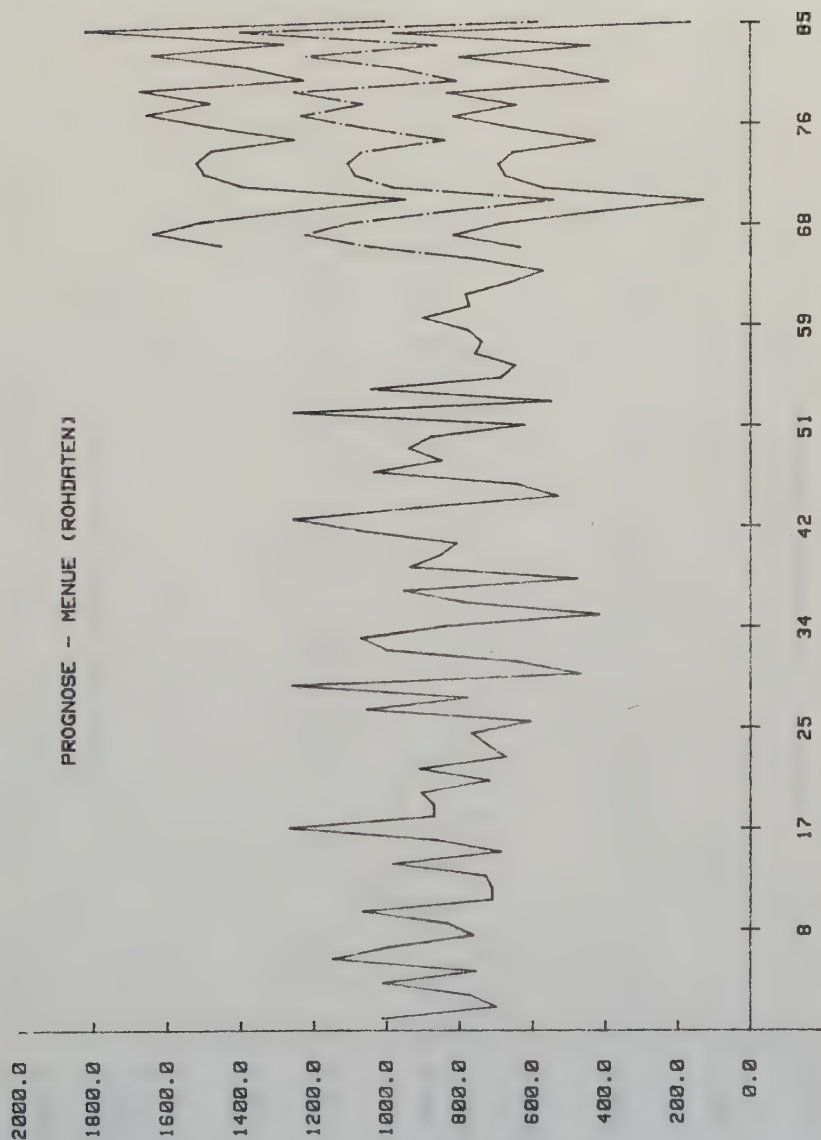


Abb. 4.9: Darstellung der Zeitreihenwerte für das SS 85 sowie von 20 Prognosewerten mit den zugehörigen Konfidenzintervallen für die Rohdaten des Angebots Menü

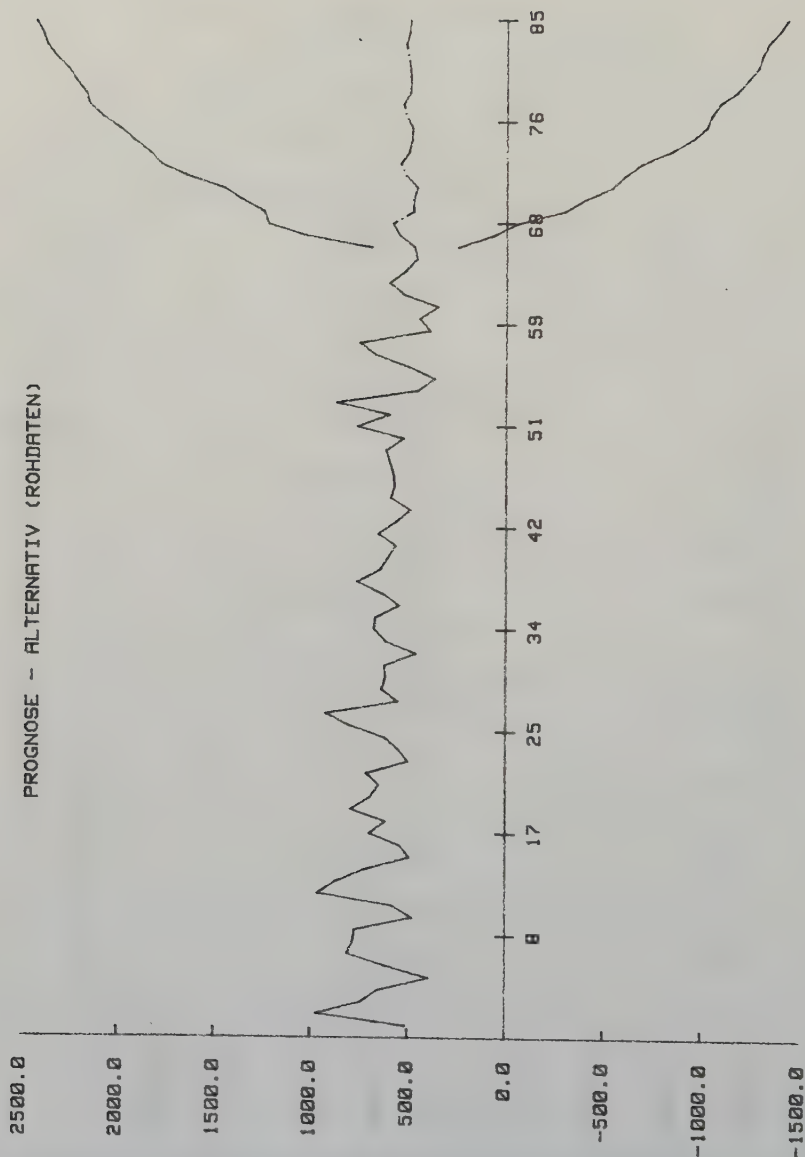


Abb. 4.10: Darstellung der Zeitreihenwerte für das SS 85 sowie von 20 Prognosewerten mit den zugehörigen Konfidenzintervallen für die Rohdaten des Alternativessens

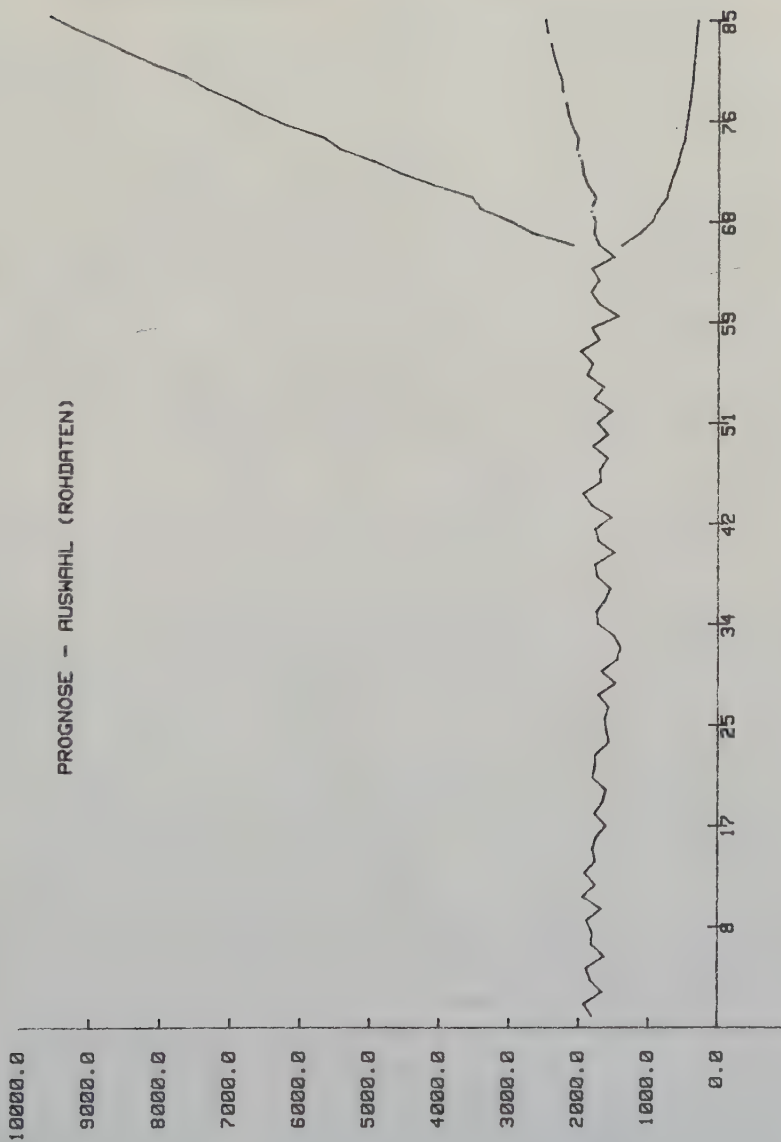


Abb. 4.11: Darstellung der Zeitreihenwerte für das SS 85 sowie von 20 Prognosewerten mit den zugehörigen Konfidenzintervallen für die Rohdaten des Auswahlssens

4.3 Vorhersagen mit Hilfe von ARIMA-Modellen und andere Prognosetechniken im Vergleich

Für die in Abschnitt 4.2.1 bestimmten ARIMA-Modelle standen für jede der vier betrachteten Zeitreihen jeweils 275 Datenpunkte zur Verfügung, die den Vorlesungszeiten des Zeitraumes WS 83/84 bis SS 85 entsprechen. Daher handelt es sich bei den in Abschnitt 4.2.2 dargestellten Vorhersagen für die ersten vier Vorlesungswochen des WS 85/86 um ex ante-Prognosen, obwohl die Absatzzahlen für diesen Zeitraum zwischenzeitlich vorliegen.

Diese Tatsache eröffnet einem jedoch die Möglichkeit, die Güte der vorgenommenen Prognosen zu bestimmen, indem man die prognostizierten den realen Werten gegenüberstellt. Eine Möglichkeit hierfür bietet der Kleinstquadratfehler der Vorhersagen; für ihn gilt (s.a. Klein, 1974, S. 442ff):

$$(4.3.1) \quad \text{RMSE}_f = \sqrt{\frac{1}{\text{TP}} \cdot \sum_{i=1}^{\text{TP}} (\text{YP}_i - \text{Y}_i)^2}$$

Hierbei kennzeichnet TP den Prognosehorizont, YP_i ($1 \leq i \leq \text{TP}$) die prognostizierten Werte sowie Y_i ($1 \leq i \leq \text{TP}$) die zugehörigen Realisationen. Da für den RMSE_f jedoch keine Verteilungsannahme vorliegt, erlangt er erst dann Aussagekraft, wenn man für den betrachteten Datensatz und Prognosezeitraum mindestens eine weitere Vorhersage mit Hilfe einer anderen Vorhersagetechnik erstellt und den zugehörigen RMSE_f mit dem zuerst berechneten RMSE_f vergleicht. "Thus far, our assessment of the short term forecast accuracy has considered a single descriptive measure. Since it is a non-parametric measure, there are no objective standards (e.g., significance levels) with which to assess the forecast accuracy. A determination of the accuracy of the model forecasts can be made, however, by comparing their accuracy to that of a mechanistic alternative-one which requires no prior theorizing (in the sense of having a prior conception of the dynamics of the policymaking process). Such an alternative should be relatively simple, quick, and require no more than some knowledge of the recent history of the endogenous variable." (Ostrom, 1978, S. 66)

Außer dem vorstehend dargestellten $RMSE_f$ existieren noch weitere Möglichkeiten zur Überprüfung der Güte von Prognosen. In diesem Zusammenhang sei lediglich auf Theil's Ungleichheitskoeffizienten U hingewiesen, der im Gegensatz zum $RMSE_f$ bereits Aussagekraft erlangt, wenn man lediglich die Ergebnisse einer Vorhersage-technik separat betrachtet. Es ist jedoch anzumerken, daß Theil unter derselben Bezeichnung U zwei verschiedene Versionen des Ungleichheitskoeffizienten veröffentlicht hat. Kennzeichnet für $1 \leq i \leq n$ P_i die n vorliegenden Prognosewerte und A_i die zugehörigen Realisationen, so findet man bei Theil (1970, S. 32) die Darstellung:

$$(4.3.2) \quad U = \frac{\sqrt{\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n (A_i - P_i)^2}}{\sqrt{\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n A_i^2} + \sqrt{\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n P_i^2}}$$

sowie bei Theil (1971b, S. 28) die Version:

$$(4.3.3) \quad U = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^n (A_i - P_i)^2}}{\sqrt{\sum_{i=1}^n A_i^2}}$$

Zur Unterscheidung bezeichnet Bliemel (1973) die Größe (4.3.2) als UI und (4.3.3) als UII . Vergleicht man Zähler und Nenner von (4.3.2), so gilt:

$$(4.3.4) \quad \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n A_i^2 - \frac{2}{n} \cdot \sum_{i=1}^n A_i \cdot P_i + \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n P_i^2 \leq \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n A_i^2 + \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n P_i^2 + \frac{2}{n} \cdot \sqrt{\left(\sum_{i=1}^n A_i^2\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^n P_i^2\right)}$$

Somit folgt $0 \leq UI \leq 1$ und es gilt $UI = 1$, falls für alle n Größen $A_i = 0$ oder $P_i = 0$ gilt bzw. wenn für $1 \leq i \leq n$ die Beziehung $P_i = -A_i$ erfüllt ist. Im Gegensatz zu UI ist die Größe

UII nicht nach oben begrenzt. Es ist jedoch genau wie bei (4.3.2) $UII = 1$, falls für $1 \leq i \leq n$ $P_i = 0$ oder $P_i = -A_i$ gilt. Darüberhinaus erhält man im Falle der perfekten Prognose, d.h. es ist $P_i = A_i$ für alle Werte, $UI = UII = 0$.

Im Rahmen seiner vergleichenden Betrachtung der Theil'schen Ungleichheitskoeffizienten gelangt Bliemel (1973) zu dem Ergebnis, daß die Version UII, die weniger Beachtung gefunden hat, aussagekräftiger ist: "The second version, namely UII, which apparently has not yet been adopted to a great extent by scholarly writers, unambiguous and easy to understand and to interpret. UII reaches its lower boundary of $UII = 0$ at perfect forecasts. It assumes the value of 1 when a forecasting method delivers forecasts with the same standard error as the naive no-change extrapolation. It increases monotonically as the standard error forecasting improves over the no-change extrapolation. If UII is larger than 1, the forecasting method applied is to be rejected because it cannot beat the most simple no-change extrapolation. Because of the superiority of these properties, it is advisable to use only UII (and not UI) when assessing the reliability of sales forecasting methods." (Bliemel, 1973, S. 446)

Schwarze (1973, S. 553) macht darauf aufmerksam, daß die Theil'schen Ungleichheitskoeffizienten nicht auf absolute Werte, sondern auf Änderungen zurechtgeschnitten sind und daß diese Tatsache manchmal nicht beachtet wird (vgl. z.B. Rothschild, 1969). Verändert man beispielsweise alle Werte um den gleichen Betrag, so hat dies keinen Einfluß auf die Zähler von UI bzw. UII, während in beiden Fällen die Nenner davon abhängen.

Vergleicht man die Größe UI mit dem $RMSE_F$, so erkennt man, daß der Theil'sche Ungleichheitskoeffizient UI eine Standardisierung des Kleinstquadratfehlers der Vorhersagen (4.3.1) darstellt. Aus diesem Grunde und da eine vergleichende Betrachtung verschiedener Prognosetechniken vorgenommen wird, erfolgt die Ermittlung der Prognosegüte unter Verwendung des $RMSE_F$'s.

Führt man für alle drei betrachteten Zeitreihen eine naive Prognose durch Fortschreibung des jeweiligen Zeitreihenwertes Y_T sowie eine Vorhersage unter Verwendung des in Abschnitt 1.3 dargestellten Verfahrens der exponentiellen Glättung durch und werden genau wie bei den in Abschnitt 4.2.2 vorgenommenen Prognosen jeweils $TP = 20$ Werte vorhergesagt, so erhält man die in

den Tabellen 4.16 bis 4.18 aufgelisteten Rohdaten, Prognosewerte und $RMSE_f$'s.

Tab. 4.16: Rohdaten und Prognosewerte für das Angebot Menü
unter Anwendung verschiedener Prognosetechniken

Datum	Roh- daten	ARIMA-Modell (4.2.3)	Fortschrei- bung von YM_{275}	exponentielle Glättung mit $\alpha = 0.05$
21.10.85	1048	819	761	805
22.10.85	1231	841	761	803
23.10.85	1099	823	761	801
24.10.85	837	818	761	799
25.10.85	541	866	761	797
28.10.85	985	849	761	795
29.10.85	1090	853	761	793
30.10.85	1110	828	761	792
31.10.85	1070	810	761	790
1.11.85	843	852	761	789
4.11.85	1061	861	761	787
5.11.85	1240	865	761	786
6.11.85	1068	859	761	785
7.11.85	1257	856	761	783
8.11.85	811	870	761	782
11.11.85	962	868	761	781
12.11.85	1223	869	761	780
13.11.85	864	864	761	779
14.11.85	1405	860	761	778
15.11.85	587	870	761	777
$RMSE_f$		275.3102	333.6004	312.8121

Tab. 4.17: Rohdaten und Prognosewerte für das Alternativessen
unter Anwendung verschiedener Prognosetechniken

Datum	Roh- daten	ARIMA-Modell (4.2.4)	Fortschrei- bung von YA ₂₇₅	exponentielle Glättung mit $\alpha = 0.15$
21.10.85	513	473	461	525
22.10.85	712	551	461	515
23.10.85	548	587	461	507
24.10.85	800	478	461	500
25.10.85	568	480	461	494
28.10.85	486	459	461	489
29.10.85	560	518	461	485
30.10.85	524	545	461	481
31.10.85	567	502	461	478
1.11.85	638	487	461	475
4.11.85	504	486	461	473
5.11.86	598	518	461	471
6.11.85	583	532	461	470
7.11.85	557	496	461	468
8.11.85	328	494	461	467
11.11.85	477	488	461	466
12.11.85	646	509	461	465
13.11.85	580	519	461	465
14.11.85	673	501	461	464
15.11.85	633	497	461	463
RMSE _F		118.9155	148.6911	133.6173

Tab. 4.18: Rohdaten und Prognosewerte für das Auswahlessen
unter Anwendung verschiedener Prognosetechniken

Datum	Roh- daten	ARIMA-Modell (4.2.4)	Fortschrei- bung von YAW ₂₇₅	exponentielle Glättung mit $\alpha = 0.15$
21.10.85	2063	1724	1505	1714
22.10.85	1968	1795	1505	1682
23.10.85	1693	1777	1505	1656
24.10.85	1931	1841	1505	1633
25.10.85	1899	1767	1505	1614
28.10.85	1979	1883	1505	1597
29.10.85	1886	1952	1505	1583
30.10.85	1724	1974	1505	1572
31.10.85	1876	2044	1505	1561
1.11.85	1656	2024	1505	1553
4.11.85	1973	2116	1505	1546
5.11.85	1915	2169	1505	1539
6.11.85	1832	2200	1505	1534
7.11.85	1929	2252	1505	1530
8.11.85	1911	2269	1505	1526
11.11.85	1964	2333	1505	1523
12.11.85	1869	2382	1505	1520
13.11.85	2027	2420	1505	1518
14.11.85	1693	2470	1505	1516
15.11.85	1946	2501	1505	1514
RMSE _f		456.7109	397.5035	336.0742

Vergleicht man die in den Tabellen 4.16 bis 4.18 aufgelisteten $RMSE_f$'s für einen Prognosehorizont von 20 Tagen, so liefert sowohl für das Angebot Menü als auch für das Alternativessen die ARIMA-Technik die günstigsten Werte, das Verfahren der exponentiellen Glättung die zweitbesten sowie die Fortschreibung die schlechtesten Ergebnisse. Im Gegensatz hierzu erhält man beim Auswählen für die ARIMA-Prognose den höchsten $RMSE_f$, während die mit Hilfe der exponentiellen Glättung durchgeführte Vorhersage einen sehr viel geringeren $RMSE_f$ und die Fortschreibung den zweitbesten Wert ergibt.

Die bisherigen Aussagen über die Güte der drei betrachteten Prognosetechniken gelten lediglich für die drei analysierten Zeitreihen sowie einen Prognosehorizont von 20 Tagen. Um im Rahmen der empirischen Untersuchung zu etwas umfassenderen Ergebnissen zu gelangen, wird im folgenden für jeden der drei vorliegenden Datensätze der $RMSE_f$ in Abhängigkeit vom Vorhersagezeitraum betrachtet. Da das WS 85/86 75 Vorlesungstage umfaßt und für den gesamten Zeitraum die Absatzzahlen für die Angebote der Mensa der Universität Oldenburg vorliegen, werden von uns für jeden Prognosehorizont von einem bis hin zu 75 Tagen Vorhersagen erstellt. In den Abbildungen 4.12 bis 4.14 ist die Entwicklung der den betrachteten Prognosetechniken entsprechenden $RMSE_f$'s in Abhängigkeit vom Vorhersagezeitraum dargestellt.

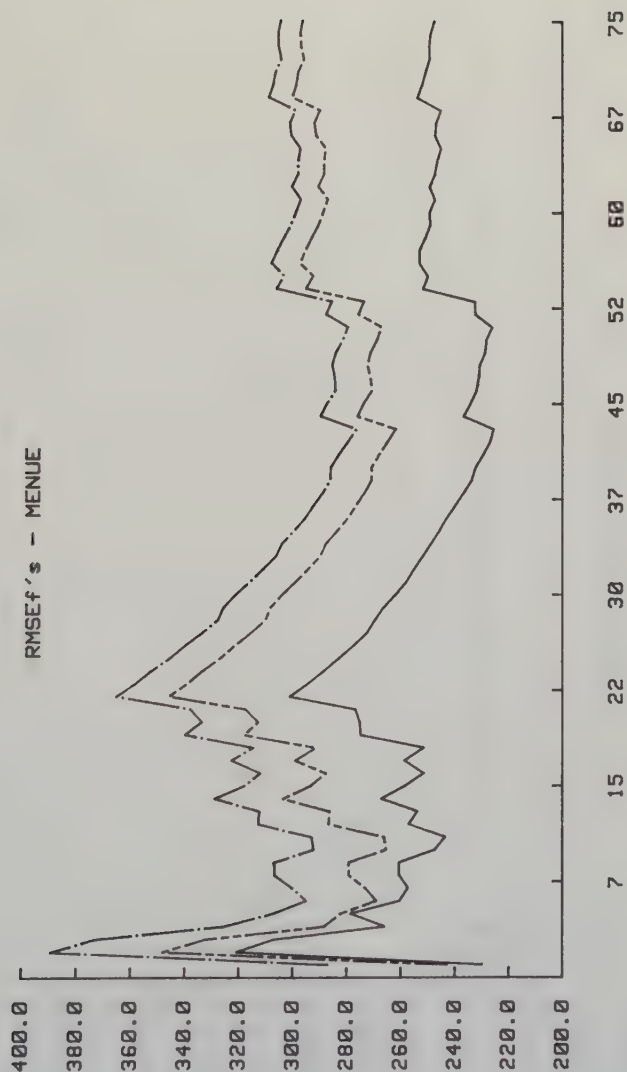


Abb. 4.12: $RMSE_F$'s für prognostizierte Rohdaten des Angebots Menü

- a) mit der ARIMA-Technik (—)
- b) mit der exponentiellen Glättung (- - -)
- c) mit der Fortschreibung (— • —)

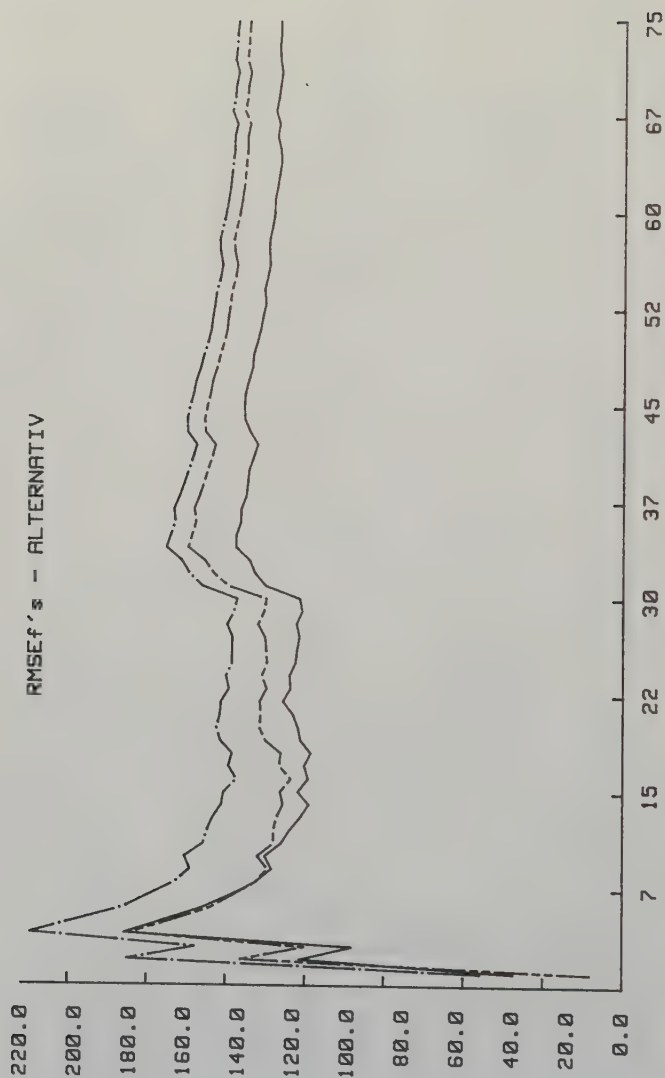


Abb. 4.13: $RMSE_F$'s für prognostizierte Rohdaten des Alternativessens

- a) mit der ARIMA-Technik (—)
- b) mit der exponentiellen Glättung (— — —)
- c) mit der Fortschreibung (— . —)

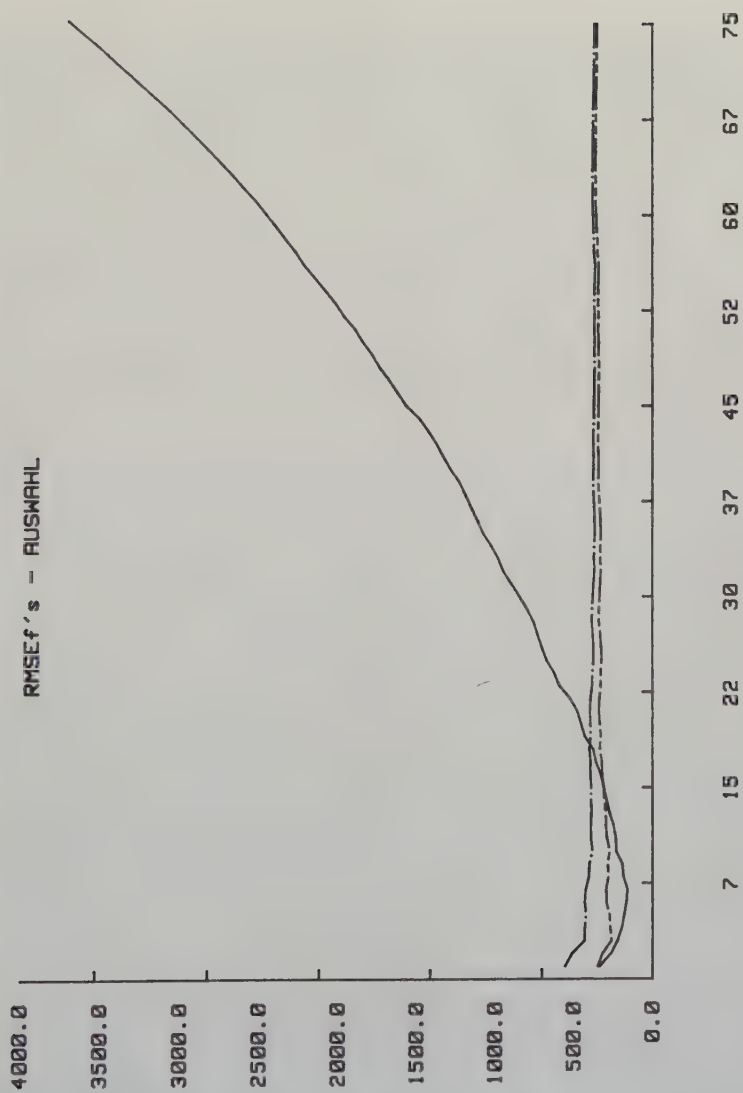


Abb. 4.14: $RMSE_f$'s für prognostizierte Rohdaten des Auswählens

- a) mit der ARIMA-Technik (—)
- b) mit der exponentiellen Glättung (- - -)
- c) mit der Fortschreibung (— · —)

In Abschnitt 1.5 wurde bereits darauf hingewiesen, daß Vorhersagen unter Verwendung der ARIMA-Technik insbesondere für kurzfristige Prognosen geeignet sind und daß die Güte dieser Vorhersagen mit zunehmendem Prognosehorizont i.a. abnimmt. Für den Einsatz von Prognosetechniken geben Makridakis & Wheelwright (1978a, S. 589) folgende Heuristiken an: "In general, qualitative or technological methods are most appropriate for long-term forecasting requirements. Quantitative methods, however, can be applied for all types of time horizons. Smoothing methods are usually best for immediate or short term and decomposition and ARMA methods are usually better for short to medium term. Regression techniques tend to be best suited for medium- to long-term usage."

Betrachtet man jedoch die Abbildung 4.12, so zeigt sich für das Angebot Menü, daß die mit Hilfe des in Abschnitt 4.2.1 bestimmten $ARIMA(0,0,0) \times (2,0,0)_5$ -Modells erstellten Vorhersagen für sämtliche betrachteten Prognosehorizonte den geringsten $RMSE_F$ ergeben haben und daß man bei Anwendung der Fortschreibung durchgängig den schlechtesten $RMSE_F$ erhält.

Wie aus Abbildung 4.13 zu ersehen ist, erhält man für das Alternativessen dieselben Ergebnisse, jedoch erst ab einem Prognosezeitraum von mindestens neun Tagen. Für Vorhersagen bis zu acht Tagen gilt ebenfalls, daß die Technik der Fortschreibung jeweils den höchsten $RMSE_F$ ergibt. Abgesehen von Vorhersagen für zwei bzw. drei Tage erhält man jedoch den günstigsten $RMSE_F$, wenn die Prognose mit Hilfe des Verfahrens der exponentiellen Glättung durchgeführt wird. Es ist allerdings anzumerken, daß in dem angeführten Prognosebereich die unter Verwendung des in Abschnitt 4.2.1 bestimmten $ARIMA(0,1,1) \times (2,0,0)_5$ -Modells ermittelten Vorhersagen verglichen mit dem Verfahren der exponentiellen Glättung nur unwesentlich höhere $RMSE_F$ -Werte ergeben.

Analysiert man die für das Auswählen erstellten Prognosen, so gilt lediglich für kurzfristige Vorhersagen mit einem Prognosehorizont von höchstens 14 Tagen, daß die ARIMA-Technik jeweils den geringsten und das Verfahren der Fortschreibung den größten $RMSE_F$ ergibt. Wie aus Abbildung 4.14 zu ersehen ist,

ergeben die unter Verwendung der Methode der exponentiellen Glättung ermittelten Prognosen den geringsten $RMSE_f$, wenn der Vorhersagezeitraum mindestens 15 Tage umfaßt. Darüberhinaus erhält man für die mit Hilfe des in Abschnitt 4.2.1 ermittelten $ARIMA(0,1,1) \times (2,0,0)_5$ -Modells erstellten Prognosen den zweitbesten $RMSE_f$, wenn der Prognosehorizont mindestens 15 Tage, jedoch höchstens 18 Tage umfaßt. Betrachtet man allerdings die weiteren Prognosezeiträume bis hin zu 75 Tagen, so ergibt der $ARIMA$ -Prozeß durchgängig den höchsten $RMSE_f$.

Aus den vorstehenden Ergebnissen folgt, daß die Technik der exponentiellen Glättung nach Brown (1963) beim Alternativessen teilweise und beim Auswahlessen größtenteils die besten Prognoseergebnisse liefert. Dies kann u.a. darauf zurückgeführt werden, daß diese beiden Zeitreihen sich jeweils mit Hilfe eines $ARIMA(0,1,1) \times (2,0,0)_5$ -Modells adäquat beschreiben lassen. Wie in Abschnitt 1.5 gezeigt wurde, entspricht das Verfahren der exponentiellen Glättung nach Brown (1963) jedoch vollständig einem $ARIMA(0,1,1)$ -Prozeß mit $\alpha = 1 - \theta_1$. "Die Verfahren der exponentiellen Glättung sind also Sonderfälle der univariaten Prognose nach Box-Jenkins. Dies gilt allerdings nur in einem sehr eingeschränkten Sinn, da nicht nur bestimmte stochastische Prozesse vorliegen müssen, sondern auch die Glättungskonstanten bestimmten Funktionen der Parameter des $ARIMA$ Modells entsprechen müssen." (Hruschka, 1980, S. 37) Sowohl beim Alternativ- als auch beim Auswahlessen ist die Beziehung $\alpha = 1 - \theta_1$ näherungsweise erfüllt, da für das Alternativessen $\hat{\theta}_1 = 0.89$ sowie für das Auswahlessen $\hat{\theta}_1 = 0.81$ gilt und in beiden Fällen $\alpha = 0.15 = 1 - 0.85$ die optimale Glättungskonstante ist.

Darüberhinaus gelangt Hruschka (1980, S. 162) im Rahmen seiner Leistungsvergleiche alternativer Prognoseverfahren zu dem Ergebnis, daß die univariate Prognose nach Box & Jenkins (1970) genauer ist, wenn die Zeitreihe einen deterministischen Trend enthält, während bei Zeitreihen mit einem stochastischen Trend das Verfahren der exponentiellen Glättung nach Brown (1963) häufig die besseren Ergebnisse liefert. Dieses Resultat bietet eine weitere Erklärung dafür, daß sowohl beim Alternativ- als

auch beim Auswählen die Technik der exponentiellen Glättung häufig die besseren Prognoseergebnisse liefert, da für die diesen Zeitreihen zugrundeliegenden $ARIMA(0,1,1) \times (2,0,0)_5$ -Modelle $\hat{L} = 0.0$ gilt, d.h. es liegt in beiden Fällen ein stochastischer Trend vom Grade $d = 1$ vor.

Im Zusammenhang mit der Beurteilung der Prognosegüte muß darauf hingewiesen werden, daß insbesondere bei Absatzprognosen die sowohl dem $RMSE_T$ als auch den Theil'schen Ungleichheitskoeffizienten zugrundeliegende Abweichung zwischen Prognose und Realisation nicht in jedem Falle zur Beurteilung der Prognosegüte herangezogen werden kann. "Angenommen, die Zeitreihenprognose signalisiere ein Sinken der Absatzhöchstmenge, so kann sich das Unternehmen dazu veranlaßt sehen, die absatzpolitischen Aktivitäten im Vergleich zur Vorperiode zu verstärken. Zeigt diese Maßnahme tatsächlich die gewünschte Wirkung, so stellt sich zwischen Absatzprognose und tatsächlicher Absatzhöchstmenge eine größere Diskrepanz ein, als bei Nichtreaktion mittels absatzfördernder Maßnahmen zustandegekommen wäre. Dennoch ist die Prognosequalität in beiden Fällen gleich. Im Falle der betrieblichen Reaktion auf die Absatzprognose wird die Prognose an ihrer Realisation gehindert." (Rosentreter, 1977, S. 647) Dieses Phänomen wird als "Selbstaufhebung" bezeichnet (vgl. O. Anderson, 1960, S. 66; Saval, 1972, S. 80) und stellt das zu der in Abschnitt 1.1 beschriebenen "Selbsterfüllung" entgegengesetzte Phänomen dar.

In den bisherigen Ausführungen wurden der ARIMA-Technik lediglich das Verfahren der einfachen exponentiellen Glättung nach Brown (1959, 1963) sowie die Fortschreibung von Y_T gegenübergestellt. Auf weitere Versionen der exponentiellen Glättung nach Holt, Modigliani, Muth & Simon (1960) und Winters (1960) soll nicht näher eingegangen werden (vgl. hierzu: Brown & Meyer, 1961; D'Escopo, 1961; Gilchrist, 1976; Groff, 1973; Harrison, 1967; Muth, 1960).

Prognosen auf der Basis von ökonometrischen Modellen werden fast ausschließlich in der Makroökonomie erstellt. Dies ist wohl in erster Linie darauf zurückzuführen, daß für die verschiedenen Richtungen der Makroökonomie Theorien zur Verfügung stehen.

Bezogen auf die zu analysierenden Verkaufszahlen der Mensa würde dies bedeuten, diese Daten mit Hilfe einer Theorie über den Absatz von "Konsumgütern" erfassen zu wollen; eine solche allgemeine Theorie wird allerdings nur in recht eingeschränktem Maße zutreffen können, da mit dieser Theorie z.B. niemals alle für den Verkauf der Angebote der Mensa der Universität Oldenburg relevanten Einflußgrößen erfaßt werden können bzw. erfaßt worden sind.

"The most serious weakness in econometric model building seems to be the absence of a model building methodology. It is argued by many that 'economic theory' should be the sole arbiter as to what structures should be built into a model. In the same way that a knowledge of engineering science, or biology, or marketing, is essential for the application of model building techniques in these areas, model building in an economic environment must clearly be approached with an appreciation of what theory and prior knowledge has to say about a particular problem situation. However, no 'theory' in any subject is sacrosanct. At a time when economic theory is finding it difficult to explain steady-state relationships, let alone dynamic effects, there is little justification for dogmatic assertion that 'economic theory' should be the only factor to be taken into account." (Jenkins, 1979, S. 90)

Sollen Prognosen mit Hilfe eines ökonometrischen Modells erstellt werden, so müssen u.a. bestimmte Annahmen (vgl. Abschnitt 1.4) über die Struktur der Residuen des postulierten Modells, wie z.B. die Unabhängigkeit der Fehlerterme, erfüllt sein; diese Annahmen sind jedoch i.a. bei Zeitreihendaten unrealistisch.

"Überall dort, wo Zeitreihen über eine große Anzahl von Perioden mit ausgeprägten Autokorrelationsstrukturen behaftet sind, wie das für betriebswirtschaftliche Daten (insbesondere Marktdaten) typisch ist, liefern mit den Originaldaten durchgeführte Regressionen zur Feststellung von Zusammenhängen zwischen den Variablen unvermeidlich trügerische Ergebnisse." (Nenning, Topritzhofner & Wagner, 1981, S. 30)

In den bisherigen Ausführungen wurde auf einige Schwierigkeiten hingewiesen, die bei der Auswertung von Zeitreihendaten mit

Hilfe von ökonometrischen Modellen entstehen können. Hieraus darf jedoch nicht gefolgert werden, daß die korrekte Erfassung bestimmter Datensätze entweder ausschließlich unter Verwendung der Zeitreihenanalyse oder nur mit Hilfe der ökonometrischen Vorgehensweise möglich ist. So erstellt Hanssens (1980) zum Zwecke der Prognose einen Ansatz zur Erfassung der Beziehungen zwischen den Verkäufen und den Werbeaufwendungen für die "Lydia Pinkham"-Daten; hierbei erfolgt im Rahmen der Modellbildung eine Kombination zwischen der zeitreihenanalytischen Vorgehensweise nach Box & Jenkins (1970) und der Ökonometrie. "In the context of forecasting, ARIMA models sometimes outperform econometric equations, This is a surprising finding, in light of the fact that ARIMA models use the information of only one time series for forecasting. However, it is known by now that ARIMA and econometric models are related to each other. This relationship removes much of the original controversy, but, more importantly, it creates some unique opportunities for empirical model building and testing on longitudinal data." (Hanssens, 1980, S. 329)

4.4 Auswahlkriterien für Prognoseverfahren

In dem vorstehenden Abschnitt haben wir der Prognosegenauigkeit einen relativ breiten Raum gewidmet. Dies scheint auch gerechtfertigt, denn Fehleinschätzungen wirken sich in der Praxis z.B. unmittelbar auf die Lagerhaltung (Fehlbestände, Überbestände) und die Produktionssteuerung (Unterbeschäftigung, Überbeschäftigung) aus. Eine mittelbare Auswirkung zeigt sich u.U. bei den verschiedenen Marketingaktivitäten; so können z.B. erhöhte Absatzvorgaben zu Motivationsverlusten bei den Außendienstmitarbeitern führen.

Der Vergleich der beiden Prognosetechniken - exponentielle Glättung nach Brown (1963) und univariate ARIMA-Modellansätze - in Abschnitt 4.3 mit dem statistischen Kriterium $RMSE_f$ hat gezeigt, daß keines dieser beiden Verfahren in allen betrachteten Fällen dem anderen überlegen ist (vgl. auch Hruschka, 1980). Aus diesem Grunde sollen im folgenden kurz einige weitere Auswahlkriterien angesprochen werden.

Sowohl bei den univariaten ARIMA-Ansätzen als auch bei den exponentiellen Glättungsverfahren wird ausschließlich die Entwicklung der vergangenen Absatzzahlen berücksichtigt. Dies kann u.U. zu einer Überbetonung der Vergangenheit und zu einer Vernachlässigung von veränderten Einflußfaktoren, wie z.B. veränderte Kundenwünsche, Wettbewerbsveränderungen sowie gesamtwirtschaftliche Entwicklungen, führen. Gegenüber den Glättungsverfahren erweist sich jedoch die ARIMA-Methodologie als flexibler, da eine Erweiterung auf die sogenannten multiplen Transferfunktionsmodelle möglich ist. Für sie gilt (vgl. Box & Jenkins, 1970; Jenkins, 1979; Makridakis & Wheelwright, 1978a,b):

$$(4.4.1) \quad Y_t = f(X_{1t}, \dots, X_{kt}) + N_t$$

bzw.

$$(4.4.2) \quad Y_t = \frac{\omega_1(B)}{\delta_1(B)} \cdot X_{1t} + \dots + \frac{\omega_k(B)}{\delta_k(B)} \cdot X_{kt} + N_t, \quad ,$$

wobei $X_{1t}, \dots, X_{kt}$ die in dem Modell berücksichtigten äußeren Einflüsse darstellen. Der Fehlerterm N_t , der u.a. nicht berücksichtigte Einflußgrößen beinhaltet, genügt einem univariaten ARIMA-Modell der Form (1.5.8). In der Literatur (Box & Jenkins, 1970; Cook & Campbell, 1979) wird N_t als Noise-Prozeß bezeichnet, was jedoch nicht mit dem "white-noise"-Prozeß verwechselt werden darf. Anwendungen der Transfermodelle in der Marktforschung findet man u.a. bei Hellmer & Johansson (1977).

Der Flexibilität steht als wesentlicher Nachteil die mit der Modellbildung der Transferfunktions-ARIMA-Modelle verbundene Komplexität und der damit zusammenhängende hohe Aufwand gegenüber. Ein Grund dafür, daß selbst univariate ARIMA-Ansätze für Prognosezwecke bisher noch nicht zum Standardinventar der betriebswirtschaftlichen Praxis gehören, liegt wohl darin, daß die herkömmliche Vorgehensweise bei der Modellbestimmung eine sehr eingehende subjektiv determinierte Analyse der SACF und der PACF erfordert (vgl. Kapitel 2). Daher ist diese Phase be-

sonders zeitaufwendig und erfordert außerdem eine besondere mathematische Qualifikation und Ausbildung des Anwenders. Somit stellt sich diese Phase als besonders personalkostenintensiv dar, was insbesondere für kleinere und mittlere Unternehmen zum Problem wird.

Aus den oben genannten Gründen werden in der Praxis einfache Prognoseverfahren vorgezogen, da zum einen die Akzeptanz komplexerer Verfahren gering ist und darüberhinaus der Rationalisierungseffekt von einfachen Verfahren i.a. eine größere Bedeutung hat als die Verbesserung der Prognoseergebnisse (s.a. Heinzelbecker, 1985). Zu entsprechenden Resultaten gelangten bereits Wheelwright & Clarke (1976) in ihrer Studie, die besagt, daß in der Industrie komplexere Methoden in der Regel erst Anwendung finden, wenn die einfacheren Prognosetechniken keine "befriedigenden" Ergebnisse mehr liefern.

Ein Grund für die geringere Akzeptanz der zeitreihenanalytischen Verfahren ist wohl darin zu sehen, daß sowohl die Methodik als auch die zur Verfügung stehende Software immer noch hohe Anforderungen an die mathematisch-statistischen Vorkenntnisse der Anwender stellt. "Von daher scheiden insbesondere für kleinere und mittlere Betriebe bestimmte Verfahren mehr oder weniger aus bzw. bedürfen noch einer Fortentwicklung in Richtung größerer Benutzerfreundlichkeit." (Hüttner, 1982, S. 166)

Ein weiterer Aspekt bei der Verwendung von komplexeren Prognosetechniken ist in dem Datenproblem zu sehen. Wie bereits in Kapitel 2 erwähnt wurde, werden bei Anwendung der herkömmlichen Vorgehensweise zur Identifikation von univariaten ARIMA-Modellen mit Hilfe von SACF und PACF mindestens 50 bis 100 Datenpunkte benötigt. Das bedeutet, daß bei monatlichen Beobachtungswerten mindestens das Datenmaterial aus den letzten fünf bis zehn Jahren zur Verfügung stehen muß. Diese Forderung muß darüberhinaus für alle in einem Transferfunktionsmodell auftretenden Variablen erfüllt sein.

Im Zusammenhang mit den hohen Datenanforderungen komplexer Verfahren, die relativ selten erfüllt werden können, ist wiederum das Kostenproblem zu nennen. Die Kosten für die Beschaffung und

Aufbereitung der Daten zählen genau wie die für die Erstellung der Prognosedaten benötigten Rechenzeiten sowie der Arbeitsaufwand zu den variablen Kosten. Demgegenüber gehören die Aufwendungen für die Entwicklung oder Beschaffung des Programms und dessen Implementierung zu den fixen Kosten.

Aus den obigen Ausführungen ist zu ersehen, daß die angesprochenen Auswahlkriterien

- Modellkomplexität
- Software und Benutzerfreundlichkeit
- Datenanforderungen
- Kosten

nicht überschneidungsfrei sind. Dies gilt auch für die in der Literatur (vgl. Brockhoff, 1977, S. 52; Makridakis, Reschke & Wheelwright, 1980, S. 223ff) angegebenen Kriterienkataloge.

Bei der Auswahl des geeigneten Prognoseverfahrens sind auch die vom Management gestellten Ansprüche an Absatzprognosen zu berücksichtigen. Da Absatzprognosen unternehmens- bzw. marketingpolitische Entscheidungen untermauern sollen, können sie nicht unabhängig vom Management durchgeführt werden. "Das Feld der Absatzprognose darf nicht den Spezialisten auf diesem Gebiet überlassen, sondern muß vom Management her geprägt werden. Die Führungskräfte haben möglichst umfassend die Ansprüche zu formulieren, die, von den zu lösenden Aufgaben ausgehend, an die Prognose zu stellen sind. Nur auf diese Weise wird eine Integration der Absatzprognose in den Entscheidungsprozeß erreicht." (Bidlemaier, 1983, S. 115)

Die in Frage kommenden Prognoseverfahren werden in diesem Zusammenhang in erster Linie durch die Art der prognostischen Marketinginformationen, d.h. sollen beispielsweise kurz- oder langfristige Prognosen erstellt werden, bestimmt. Weitere wesentliche Aspekte sind die an die Prognoseergebnisse gestellten Genauigkeitsansprüche, der zur Verfügung stehende Untersuchungszeitraum sowie der dem Absatzprognostiker zur Verfügung stehende Etat.

Die Ergebnisse von Absatzprognosen dienen den Unternehmen in erster Linie zur Beurteilung der zukünftigen Marktsituation.

"Die Verwendung von absatzprognostischen Ergebnissen erschöpft sich aber keineswegs in ihrer direkten Nutzung. Sie sind vielmehr zugleich wichtige Bausteine im Rahmen von Marketingmodellen. Diese besondere mittelbare Bedeutung wird ersichtlich, wenn man bedenkt, daß nahezu alle in die Modelle eingehenden Informationen zukunftsbezogen sind, also prognostiziert werden müssen. Die Resultate von Absatzprognosen können maßgeblich zur empirischen Gültigkeit der Lösungen von Marketingmodellen beitragen." (Bidlinauer, 1983, S. 116)

Umgekehrt stellt die Güte von Vorhersagen, die mit Hilfe eines Marketingmodells erstellt werden können, ein entscheidendes Kriterium dafür dar, ob dieses Marketingmodell in die Modellbank eines Marketing-Informationssystems aufgenommen wird.

"Die prognostische Relevanz ist aller Wahrscheinlichkeit nach entscheidend für die Gültigkeit eines Marketing-Modells. Wenn die Marketing-Manager mittels eines Prognosemodells in der Lage sind, das Verhalten von bedeutsamen Modellvariablen vorherzusagen, wird ihr Vertrauen in die prognostischen Fähigkeiten dieses Modells anwachsen, so daß sie es vielleicht anwenden werden." (Breitung, 1975, S. 236) Die prognostische Relevanz eines Marketingmodells berücksichtigt beispielsweise Little (1970) indirekt in seinen Kriterien der Benutzungssicherheit und Prüfbarkeit.

5. Zusammenfassung und Ausblick

In der vorliegenden Arbeit wurde die Modellklasse der von Box & Jenkins (1970) entwickelten $ARIMA(p,d,q) \times (P,D,Q)_s$ -Ansätze (siehe Kapitel 2) skizziert und es wurden die bei der Modellbestimmung - insbesondere in der Identifikationsphase - auftretenden Probleme dargestellt. Daran anschließend sind von uns sequentielle Testverfahren zur Ermittlung der Modellparameter p, d, q und P, D, Q, s eines ARIMA-Prozesses, zur Überprüfung der Rohdaten auf Varianzhomogenität sowie zur Adäquatheitsüberprüfung hergeleitet bzw. modifiziert worden. Alle diese Tests sowie der von Göricke (1986) entwickelte rekursive Parameterschätzalgorithmus RML sind in dem Programm "FITTING", für das ein Ablaufschema im Anhang wiedergegeben ist, enthalten. Dieses Programm, das lediglich die Vorgabe der zu analysierenden Daten sowie des mit den durchzuführenden Tests verbundenen α - und β -Fehlers verlangt, ermöglicht einem die vollautomatische Bestimmung des der Zeitreihe zugrundeliegenden ARIMA-Prozesses.

In diesem Zusammenhang sei darauf hingewiesen, daß bereits Computerprogramme zur Identifikation, Parameterschätzung als auch zur Adäquatheitsüberprüfung von ARIMA-Modellen existieren. So geben u.a. Strauß & Stemmler (1985, S. 150f) einen Überblick über die wichtigsten Computerprogramme zur Zeitreihenanalyse und deren Anwendungsmöglichkeiten. Ein solches Programmpaket, daß für die Identifikation, die Parameterschätzung, die Modelldiagnostik als auch für die Prognose Programme zur Verfügung stellt, die jeweils separat aufgerufen werden können, ist BMDP (Dixon, 1983; Bollinger, Herrmann & Möntmann, 1983). Darüberhinaus werden für die Anwendung von BMDP keine Programmierkenntnisse benötigt, wie dies z.B. bei dem Programmpaket IMSL erforderlich ist. Es soll noch das von Carr & Keeser (1984) entwickelte Programm HTS erwähnt werden, bei dem die Modellidentifikation mit Hilfe der in Abschnitt 2.2 dargestellten ESACF-Methode durchgeführt wird. Weitere Programme findet man u.a. bei McCleary & Hay (1980) sowie bei Gottman (1981). Alle diese Programme basieren jedoch auf den in Kapitel 2 dargestellten subjektiven Entscheidungsregeln zur Bestimmung eines ARIMA-Prozesses, während in dem von uns entwickel-

ten Programm "FITTING" ausschließlich statistisch abgesicherte Testverfahren zur Anwendung gelangen. Ein weiteres Problem bei der üblichen Vorgehensweise zur Ermittlung von ARIMA-Modellen stellt die benötigte große Datenmenge dar. So wird in der Literatur zur Zeitreihenanalyse häufig verlangt, daß mindestens 50 bis 100 äquidistante Beobachtungspunkte vorliegen sollten, um über Art und Ausmaß der seriellen Abhängigkeit einigermaßen gültige Schlußfolgerungen ziehen zu können. Diese Forderung steht im Zusammenhang mit den zahlreichen erforderlichen subjektiven Entscheidungen, die vor allem bei der Auswertung von SACF und PACF bei der üblichen Vorgehensweise getroffen werden müssen (vgl. Abschnitt 2.1).

Bei den in Kapitel 3 dargestellten sequentiellen Testverfahren verliert diese Forderung jedoch an Gewicht, da bei diesen Tests der Anteil subjektiver Einflüsse auf ein Minimum reduziert wird. So werden z.B. bei Glass, Willson & Gottman (1975) einige simulierte Zeitreihen behandelt, die höchstens 40 Daten umfassen; das Programm "FITTING" ermittelt für diese Datensätze die angegebenen adäquaten Modelle. Darüberhinaus ergeben sich für vier von sechs Datensätzen, die wir vom Institut für Seeverkehrswirtschaft und -logistik in Bremen erhielten und die weniger als 30 Quartalsdaten umfassen sowie eine saisonale Komponente enthalten, adäquate ARIMA-Modelle.

Liegen jedoch weniger als 50 Daten vor, so sollte der Parameterschätzalgorithmus RML rekursiv-iterativ ablaufen, um die Konvergenz dieses Verfahrens sicherzustellen. In diesem Zusammenhang wird empfohlen, so viele Durchläufe zu starten, bis die Änderungen im Schätzwert zweier aufeinanderfolgender Iterationen betragsmäßig kleiner als eine vorgegebene Schranke η sind, d.h. als Abbruchkriterium kann die Bedingung

$$(5.1) \quad |\hat{\beta}_T^{(i)} - \hat{\beta}_T^{(i-1)}| \leq \eta \rightarrow 0$$

gewählt werden.

Eine detaillierte Darstellung des iterativen erweiterten Kalman-Filters findet man u.a. bei Krebs (1980).

Die Auswertung aller bisher angesprochenen Datensätze sowie der Mensadaten in Kapitel 4 erfolgte pseudosequentiell, da sämtliche angesprochenen Zeitreihen vollständig vorlagen. Wie aus den Tabellen 4.6 bis 4.9 hervorgeht, wurde lediglich im Zusammenhang mit dem Test auf Varianzhomogenität die vollständig vorliegende Datenmenge für eine Testentscheidung bei den Datensätzen Tellergericht und Auswahlen benötigt. Alle anderen Testverfahren gelangten nach der Auswertung von weit weniger als den 275 vorhandenen Daten zu einer Testentscheidung. Die dargestellten Verfahren zur Bestimmung eines ARIMA-Modells können somit kosten- und zeitsparend eingesetzt werden, da im Gegensatz zu den klassischen Testverfahren eine Auswertung der anfallenden Daten simultan zu ihrer Erhebung möglich ist.

Die Sequenzanalyse fand in den letzten 20 Jahren kaum Beachtung. Ein Hauptgrund hierfür ist wohl der häufig geäußerte Einwand, daß bei der sequentiellen Vorgehensweise nur so lange Daten erhoben zu werden brauchen, bis die Prüfgröße dem vom Anwender gewünschten Testergebnis entspricht. Wir empfehlen daher, im Falle einer echten sequentiellen Auswertung zusammen mit den α - und β -Fehlern a priori eine maximale Beobachtungszahl $T_{\max}$ vorzugeben; hierbei hängt $T_{\max}$ im wesentlichen sowohl von den Kosten der Einzelerhebung als auch von dem vertretbaren zeitlichen Aufwand der Gesamtuntersuchung ab. Reichen die $T_{\max}$ erhobenen Daten nicht aus, so ist eine Testentscheidung unter Verwendung der in Abschnitt 3.7.3 skizzierten Abbruchregeln herbeizuführen. Für die Bestimmung eines ARIMA-Modells sind mehrere sequentielle Tests durchzuführen; die Festlegung von $T_{\max}$ sollte sich in diesem Zusammenhang an dem Test auf Varianzhomogenität orientieren, da dies in jedem Falle die zuerst durchzuführende Überprüfung ist. Darüberhinaus benötigt dieses Testverfahren i.a. die größte Datenmenge bis zu einer Testentscheidung. Somit können alle folgenden Tests pseudosequentiell mit maximal $T^* \leq T_{\max}$ Daten durchgeführt werden, wobei T^* die tatsächlich erhobene Datenmenge bis zu einer Entscheidung im Rahmen des Tests auf Varianzhomogenität symbolisiert.

Wie aus dem im Anhang wiedergegebenem Ablaufschema des Programms "FITTING" hervorgeht, bauen die durchzuführenden Tests aufeinander

der auf. In diesem Zusammenhang ist auf das Problem hinzuweisen, daß eine falsche Testentscheidung bei einem der ersten Tests - insbesondere bei der Überprüfung auf Varianzhomogenität - sich auf jeden der folgenden Tests auswirken kann.

Ist ein adäquates $\text{ARIMA}(p,d,q) \times (P,D,Q)_s$ -Modell gefittet worden, so können mit Hilfe des Programms "FITTING" sowohl ex post- als auch ex ante-Prognosen mit den zugehörigen Prognosefehlern, Standardfehlern und Konfidenzintervallen (vgl. Abschnitt 4.2.2) erstellt werden. In Abschnitt 1.5 wurde bereits darauf hingewiesen, daß die ARIMA-Technik hauptsächlich nur für kurzfristige Prognosen eingesetzt wird. Die vergleichende Betrachtung verschiedener Prognosetechniken an Hand der Mensadaten in Abschnitt 4.3 deutet jedoch an, daß die ARIMA-Technik auch bei längerfristigen Vorhersagen sinnvoll eingesetzt werden kann. So liefern die ARIMA-Prognosen nur im Falle des Auswählens fast durchgängig schlechtere Prognoseergebnisse als die Verfahren der exponentiellen Glättung erster Ordnung nach Brown (1963) und der Fortschreibung. Im Gegensatz hierzu erhält man unter Verwendung der ARIMA-Technik für das Alternativessen für fast alle betrachteten Prognosehorizonte die besten Vorhersagen.

Aus der Kombination der ARIMA-Technik mit der sequentiellen Vorgehensweise sowohl bei Hypothesentests als auch bei Parameterschätzungen ergeben sich noch vielfältige Anwendungsmöglichkeiten, auf die in dieser Arbeit nicht eingegangen wurde. Ist beispielsweise ein adäquater ARIMA-Prozeß gefittet worden und werden weiterhin Daten erhoben, so bietet die Sequenzanalyse die Möglichkeit, simultan zu den erneut anfallenden Daten zu überprüfen, ob dieses ARIMA-Modell nach wie vor Gültigkeit besitzt; somit kann frühzeitig ein Strukturbruch erkannt werden.

Weiterhin können bei Anwendung der Sequenzanalyse einer konstanten Nullhypothese H_0 nicht nur eine oder mehrere konstante Alternativhypothesen H_i ($i = 1, \dots, k$) gegenübergestellt werden, sondern es besteht ebenfalls die Möglichkeit, der Nullhypothese H_0 eine variable Alternativhypothese H_A gegenüberzustellen, d.h. in der Alternativhypothese wird eine funktionale Abhängigkeit des betrachteten Parameters von der Zeit angenommen. Da die Beobach-

tungen sequentiell erfolgen, ist dies gleichbedeutend mit einer funktionalen Abhängigkeit des betrachteten Parameters β_i von der Beobachtungszahl m . Allgemein erhält man die Hypothesenformulierung

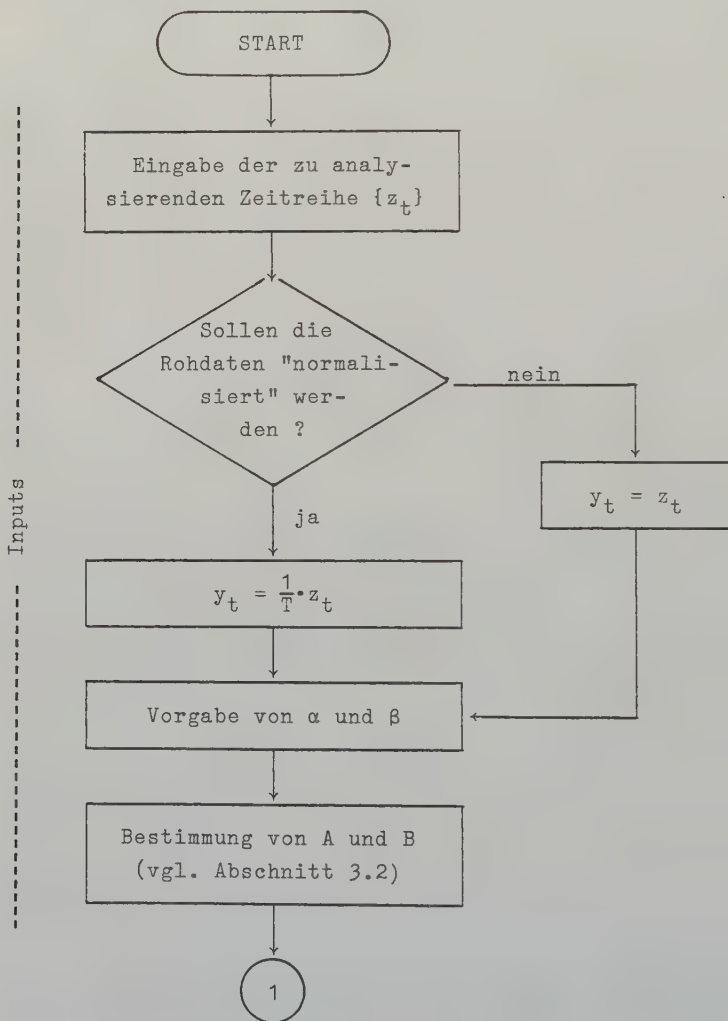
$$(5.2) \quad \begin{aligned} H_0: \beta &= \beta_i \\ H_A: \beta &= \beta(m) \end{aligned}$$

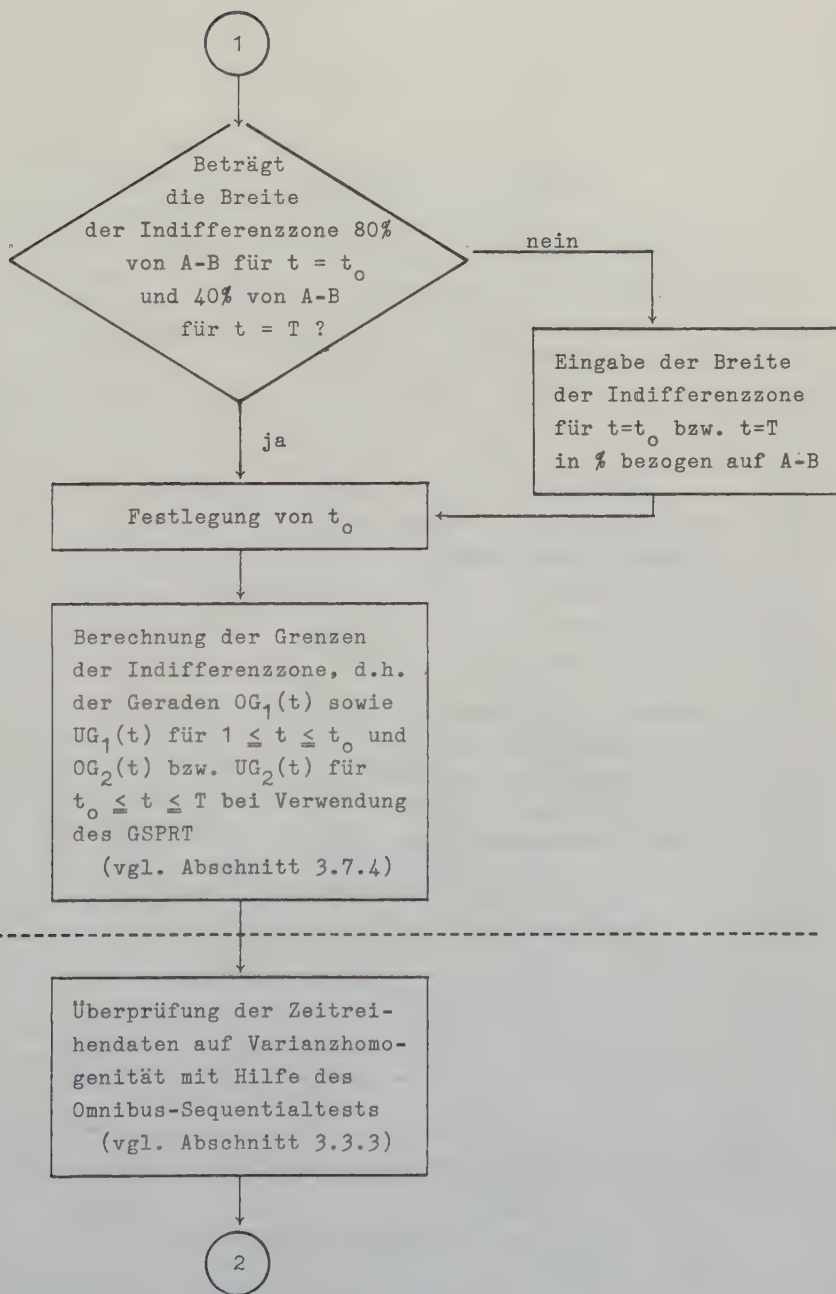
wobei $\beta(m)$ eine monotone Funktion ist. Somit können ARIMA-Modelle mit zeitabhängigen ϕ - und θ -Parametern in die Betrachtungen einbezogen werden und es kann überprüft werden, ob die einzelnen Parameter zeitkonstant sind oder ob eine bestimmte angenommene Abhängigkeit von der Zeit besteht. Malý (1963) behandelt Tests von Hypothesen mit einer veränderlichen Alternativhypothese für die Binomial-, Poisson- und Normalverteilung.

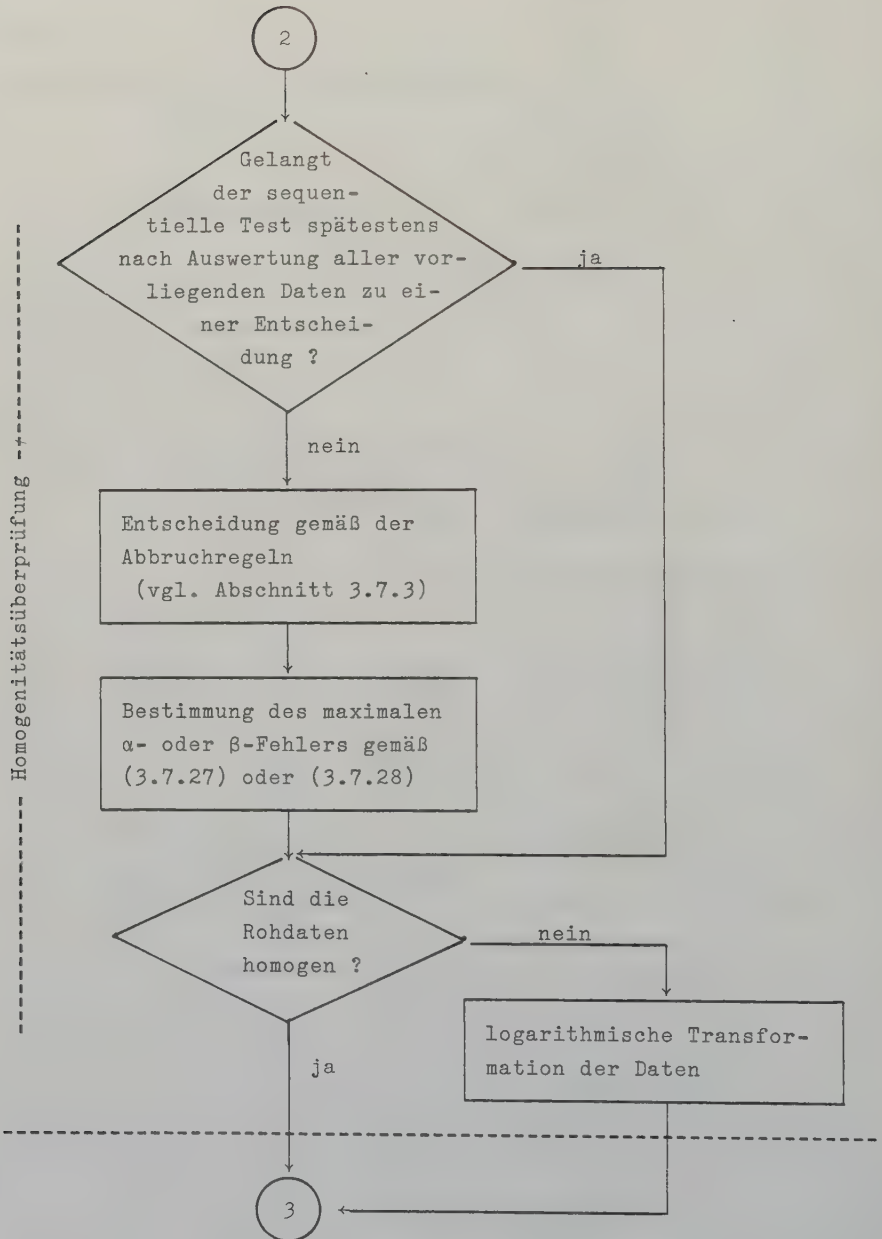
In der vorliegenden Arbeit wurden lediglich univariate ARIMA(p,d,q)x(P,D,Q)_s-Prozesse behandelt. Betrachtet man jedoch die gängigen Verfahren zur Bestimmung von multiplen und multivariaten Transfer-ARIMA-Modellen, so deutet sich die Möglichkeit an, solche Prozesse ebenfalls mit Hilfe sequentieller Testverfahren statistisch abgesichert und vollautomatisch ermitteln zu können. Eine solche Erweiterung würde z.B. zusätzliche Tests zur Ermittlung der wechselseitigen Abhängigkeiten zwischen den betrachteten Zeitreihen, d.h. insbesondere zur Analyse der Kreuzkorrelationsfunktionen, erfordern.

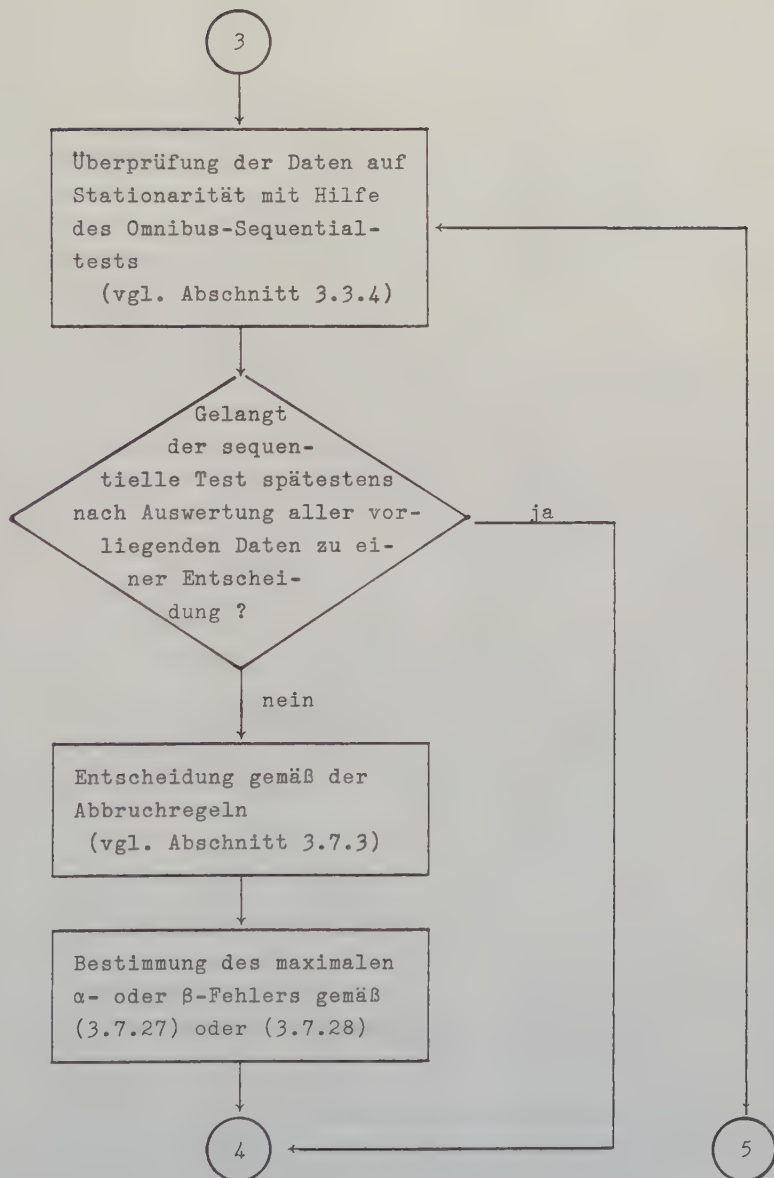
Anhang

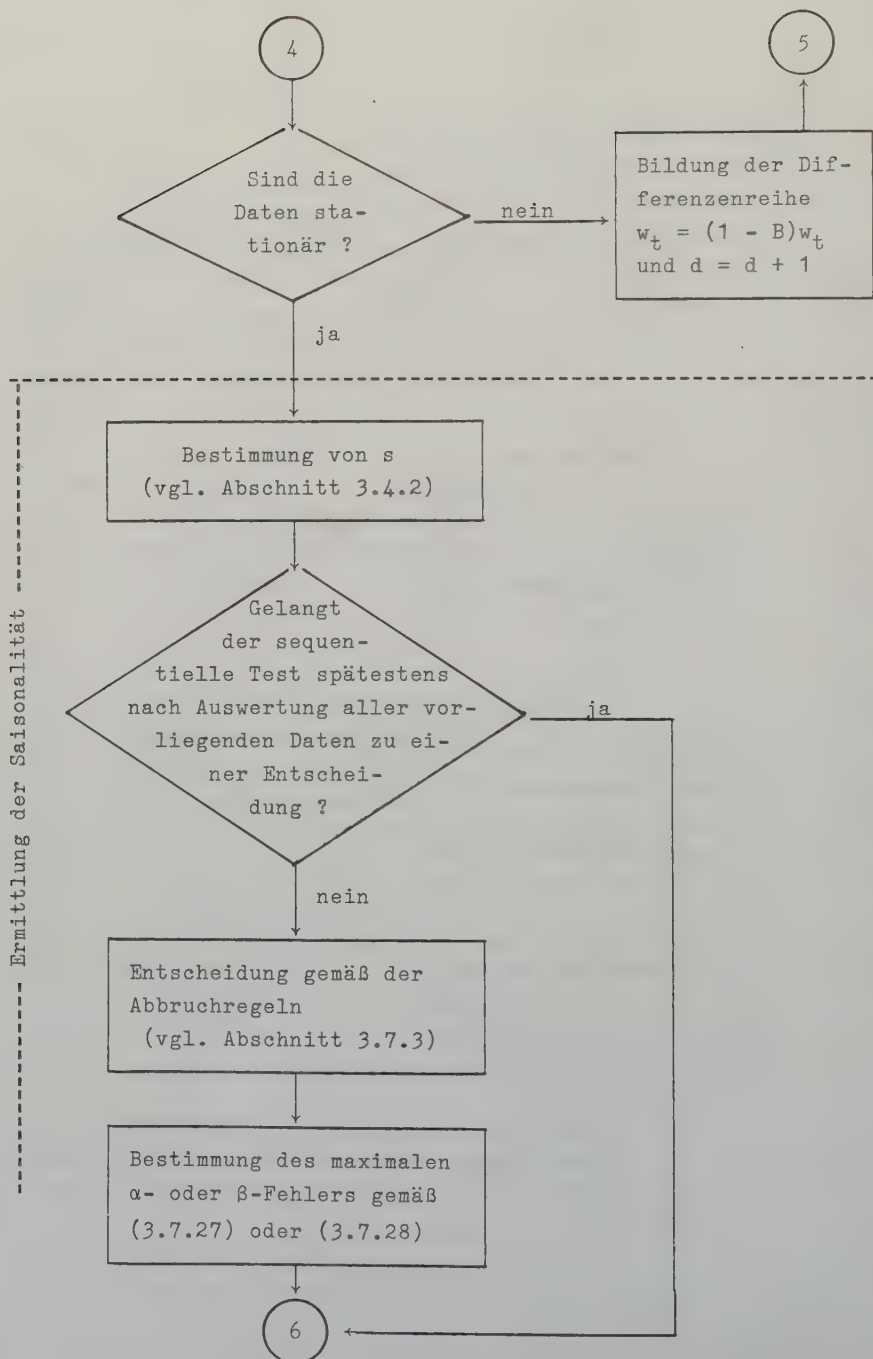
Ablaufschema für das Programm "FITTING"

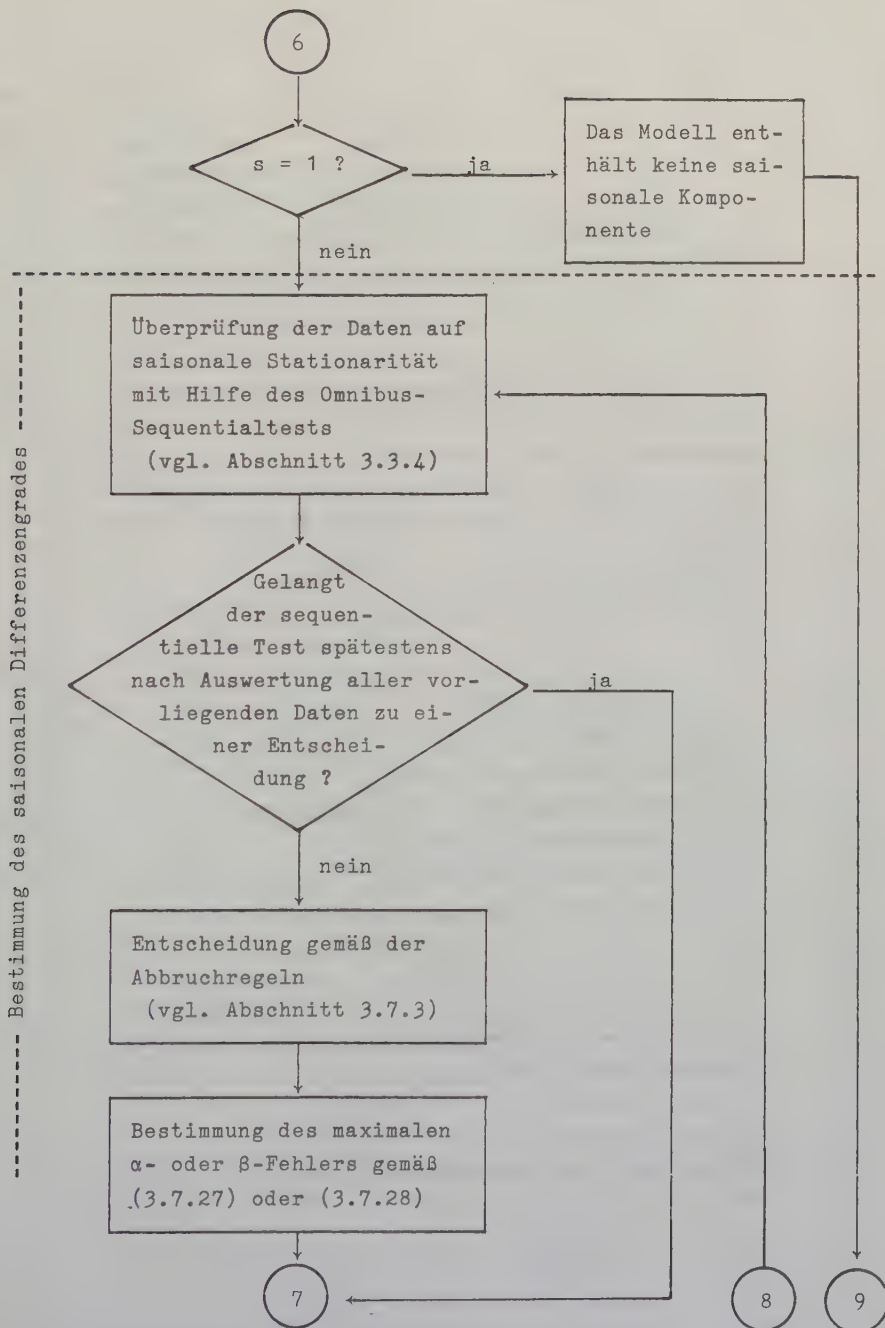


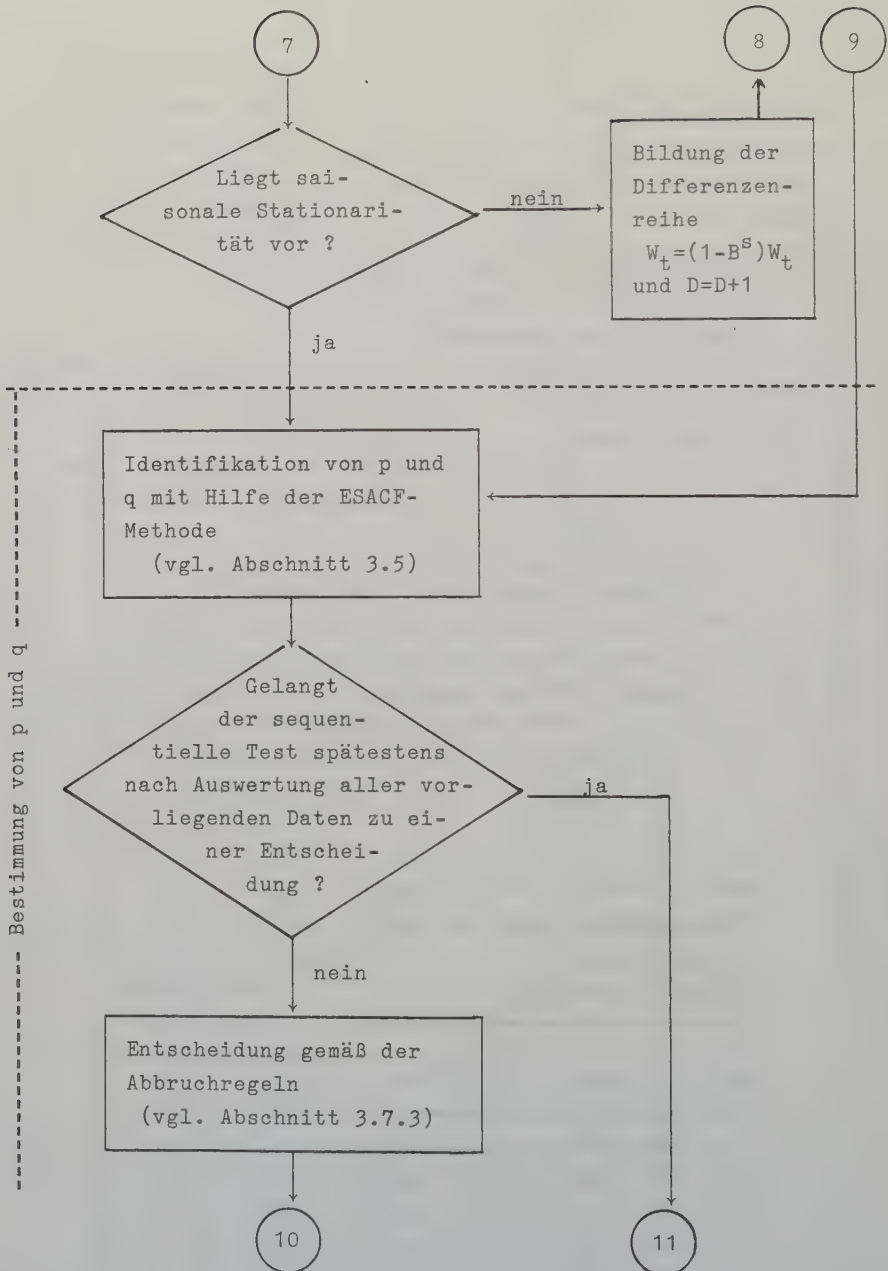




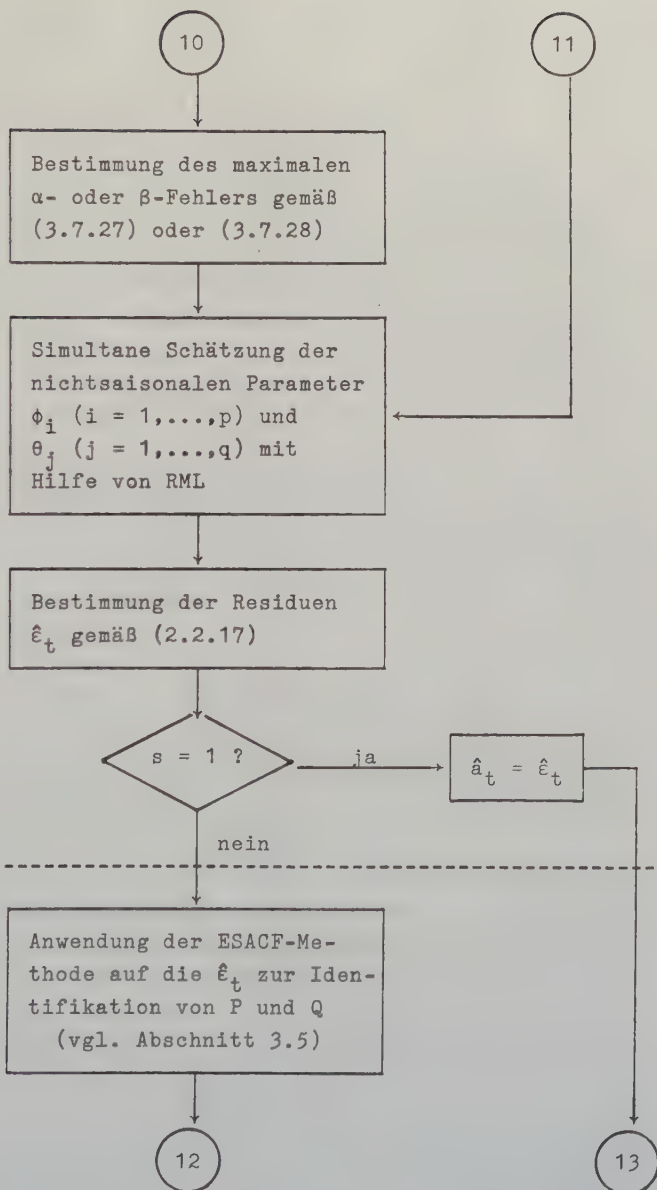




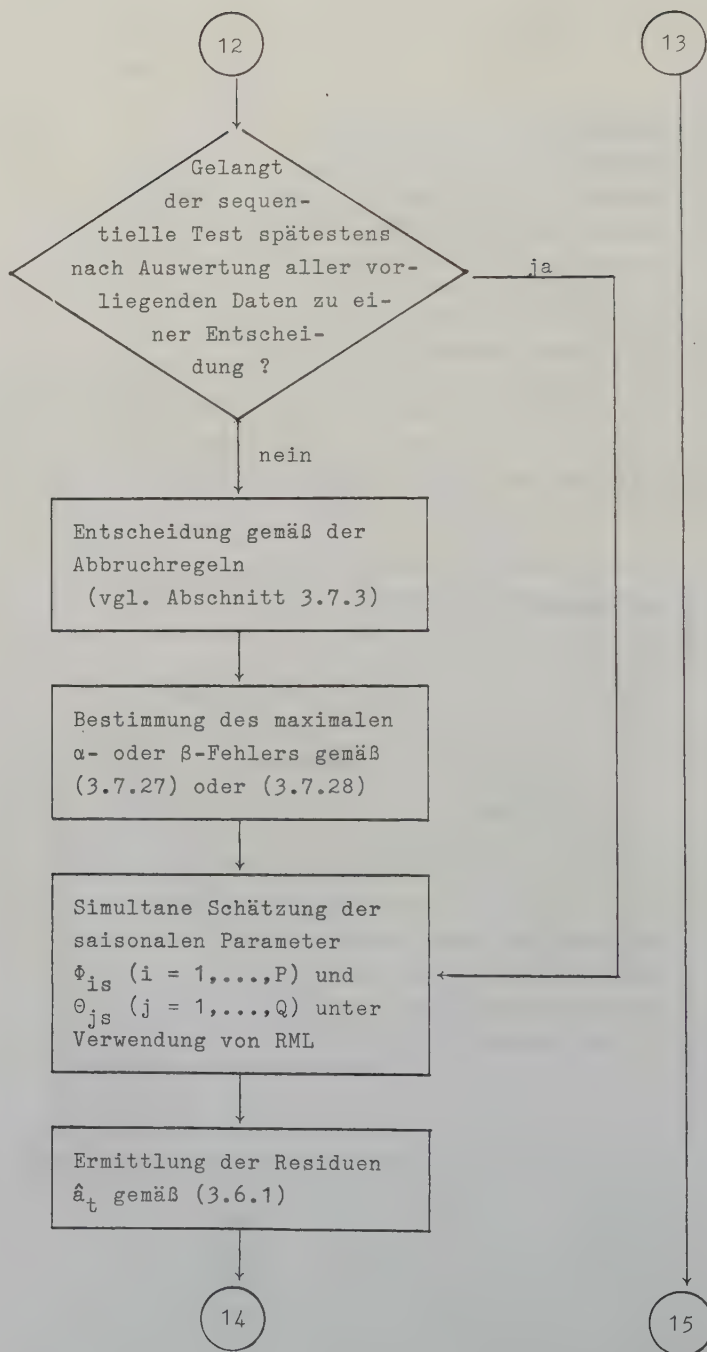


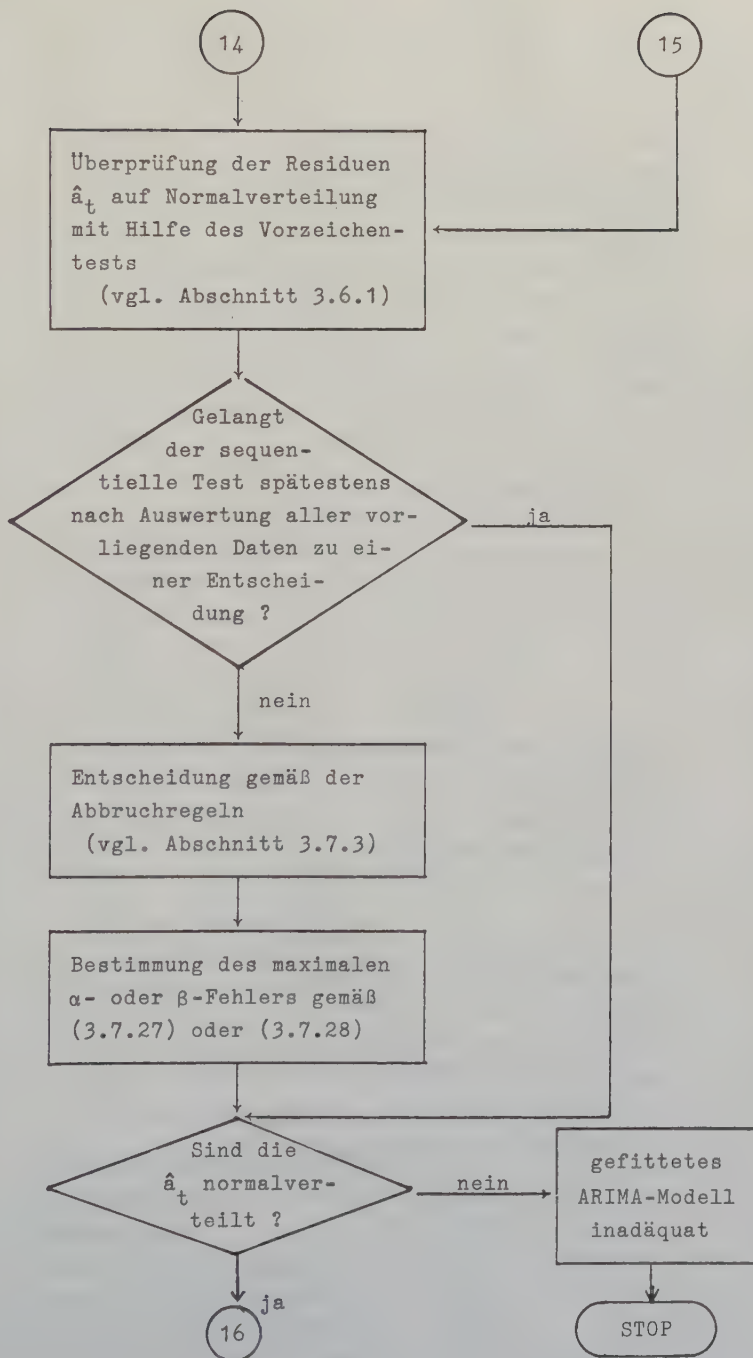


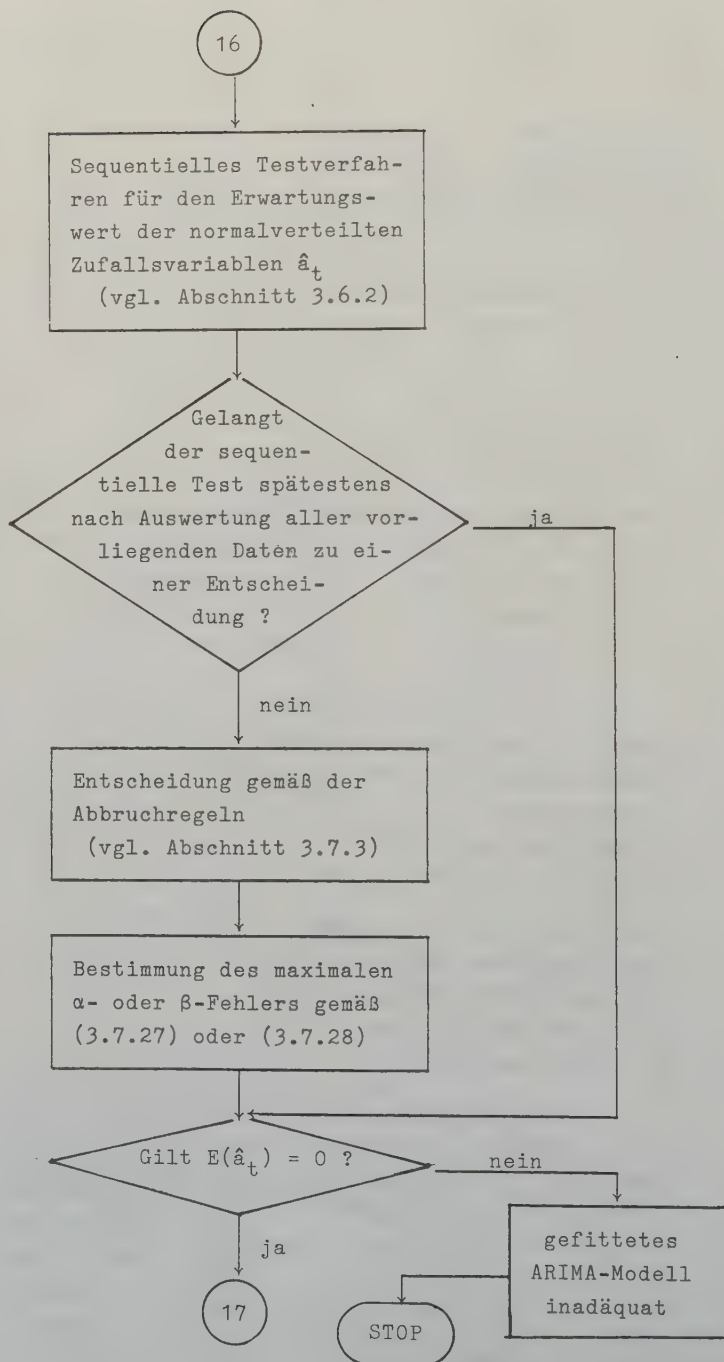
----- Schätzung der nichtsaisonalen Parameter -----

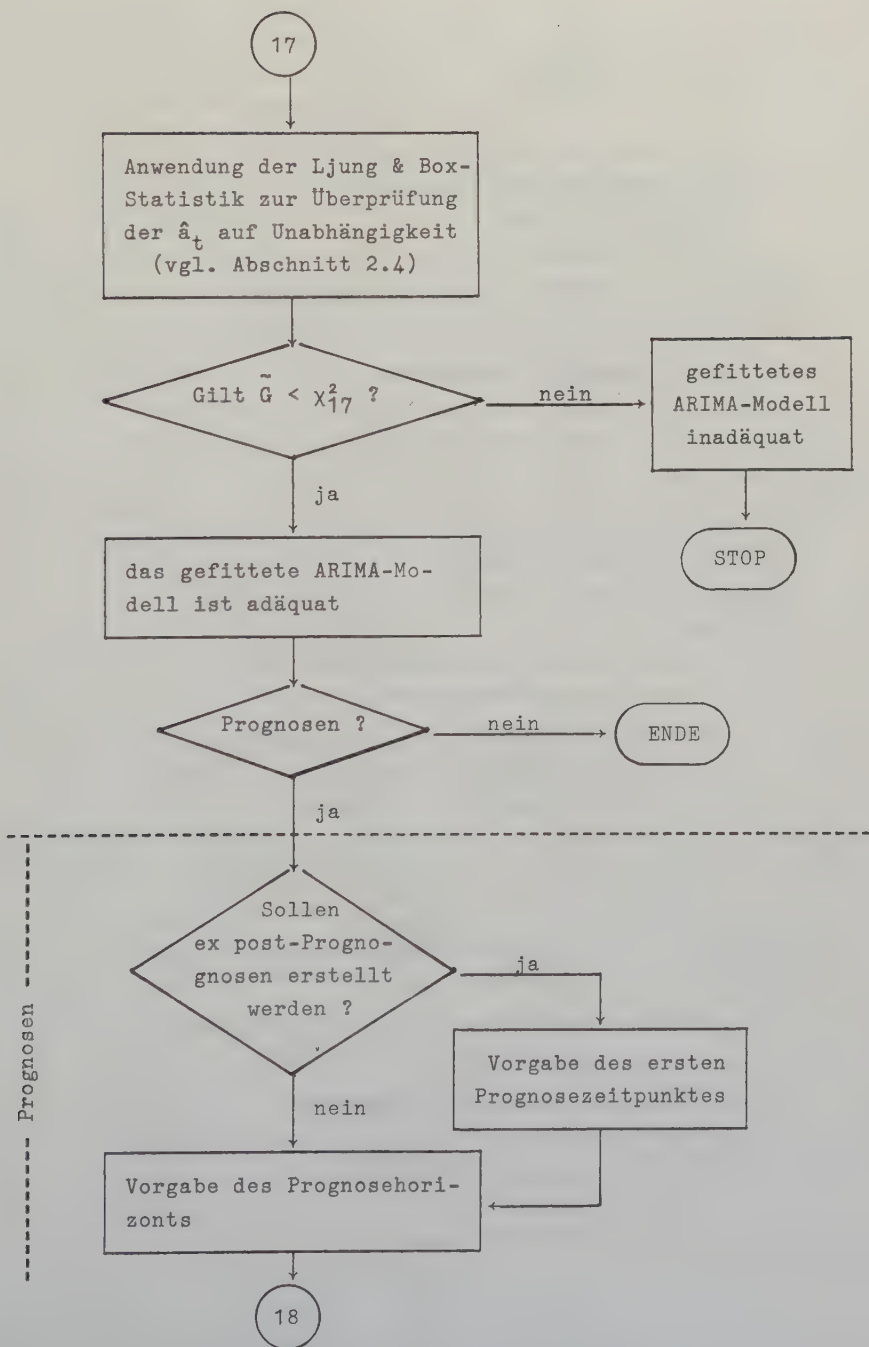


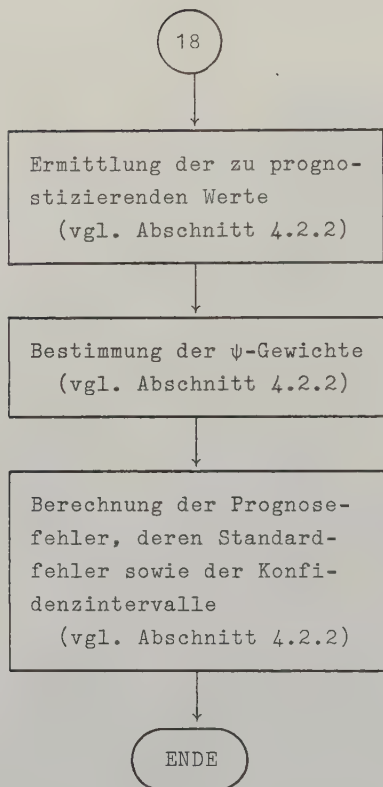
----- Ermittlung der Modellparameter P und Q und Schätzung der zugehörigen Parameter -----











Literaturverzeichnis

- Abraham, B.; Ledolter, J.: Statistical Methods for Forecasting,
New York: John Wiley & Sons, 1983
- Andersen, A.: An Empirical Examination of Box-Jenkins Forecasting,
Journal of the Royal Statistical Society, 1982, A, 4,
472 - 478
- Anderson, O.: Die Problematik von Wirtschaftsprognosen und kri-
tische Darstellung von Methoden zu ihrer Berechnung,
Der Marktforscher, 1960, Heft 3, 64ff
- Anderson, O.D.: Time Series Analysis and Forecasting/The Box-
Jenkins Approach,
London, Boston: Butterworths, 1976
- Anderson, R.L.: Distribution of the serial correlation coefficient,
Ann. Math. Statist., 1942, 13, 1
- Anderson, T.W.: A modification of the sequential probability
ratio test to reduce the sample size,
Ann. Math. Statist., 1960, 31, 165 - 197
- Anderson, T.W.: The Statistical Analysis of Time Series,
New York: John Wiley & Sons, 1971
- Ansley, C.F.: An algorithm for the exact likelihood of a mixed
autoregressive-moving average process,
Biometrika, 1979, 66, 1, 59 - 65
- Armitage, P.: Sequential analysis with more than two alternative
hypotheses, and its relation to discriminant function
analysis,
Journal of the Royal Statistical Society, 1950, B, 12,
137 - 144
- Barner, M.; Flohr, F.: Analysis I,
Berlin, New York: De Gruyter, 1974
- Bartlett, M.S.: On the Theoretical Specifications of the
Sampling Properties of Autocorrelated Time Series,
Journal of the Royal Statistical Society, 1946, B, 8,
27 - 41

- Baruah, H.K.; Bhattacharjee, G.P.: A Generalization of Anderson's Modified Sequential Probability Ratio Test, Journal of Statistical Computation and Simulation, 1980, Vol. 11, 197 - 208
- Bass, F.M.: Ein Wachstumsmodell für neuere Gebrauchsgüter, in: Weinberg, P.; Behrens, G.; Kaas, K.P. (Hrsg.) Marketingentscheidungen, 202 - 220, Köln: Kiepenheuer & Witsch, 1974
- Beck, J.V.; Arnold, K.J.: Parameter Estimation in Engineering and Science, New York: John Wiley & Sons, 1977
- Bedenbender, R.: Optimale sequentielle Schätzverfahren, Dissertation, Göttingen, 1978
- Beyer, O.; Hackel, H.; v. Pieper, V.; Tiedje, J.: Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematische Statistik, Leipzig: B.G. Teubner Verlagsgesellschaft, 1976
- Bidlingmaier, J.: Marketing 1, Opladen: Westdeutscher Verlag, 1983
- Bliemel, F.: Theil's Forecast Accuracy Coefficient: A Clarification, Journal of Marketing Research, Vol. X (November 1973), 444 - 446
- Bollinger, G.; Herrmann, A.; Möntmann, V.: BMDP - Statistikprogramme für die Bio-, Human- und Sozialwissenschaften, Stuttgart: Fischer, 1983
- Bongard, J.: Bereinigung von Saisonschwankungen durch die Methode der gleitenden Modelle, Statistische Informationen I, 1963
- Box, G.E.P.; Cox, D.R.: An Analysis of Transformations, Journal of the Royal Statistical Society, 1964, B, 26, 211 - 252
- Box, G.E.P.; Jenkins, G.M.: Time Series Analysis: Forecasting and Control, San Francisco: Holden-Day, 1970

- Box, G.E.P.; Pierce, D.A.: Distribution of residual autocorrelations in ARIMA Time Series models,
Journal of the American Statistical Association,
1970, 64, 1509 - 1526
- Box, G.E.P.; Tiao, G.C.: Intervention Analysis with Applications to Economic and Environmental Problems,
Journal of the American Statistical Association,
1975, 70, 70 - 79
- Bradley, R.A.; Merchant, S.D.; Wilcoxon, F.: Sequential rank test II. Modified two-sample procedures,
Technometrics, 1966, 8, 615 - 623
- Breitung, A.: Marketing-Informationssysteme,
Meisenheim am Glan: Verlag Anton Hain, 1975
- Brockhoff, K.: Prognoseverfahren für die Unternehmensplanung,
Wiesbaden: Gabler-Verlag, 1977
- Brown, L.D.; Rozeff, M.S.: Adaptive Expectations, Time-Series Models, and Analyst Forecast Revision,
Journal of Accounting Research, Autumn 1979, Vol. 17,
No. 2, 341 - 357
- Brown, R.G.: Statistical Forecasting for Inventory Control,
New York: Mc Graw-Hill, 1959
- Brown, R.G.: Smoothing, Forecasting and Prediction of Discrete Time Series,
Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1963
- Brown, R.G.; Meyer, R.F.: The Fundamental Theorem of Exponential Smoothing,
Operations Research, 1961, Vol. 9, No. 5, 673 - 685
- Carr, D.; Keeser, W.: HITS (A program for Helping and Identifying uni- and multivariate Time-Series models),
Unveröffentlichter Arbeitsbericht, Institut für Medizinische Psychologie, München, 1984
- Chow, Y.S.; Robbins, H.: On the asymptotic theory of fixed-width sequential confidence intervalls for the mean,
Ann. Math. Statist., 1965, 36, 457 - 462

- Clarke, D.G.: Econometric Measurement of the Duration of Advertising Effect on Sales,
Journal of Marketing Research, Vol. XIII (November 1976),
345 - 357
- Cook, T.D.; Campbell, D.T.: Quasi-Experimentation,
Chicago: Rand Mc. Nally College Publishing Company, 1979
- Dahme, B.: Zeitreihenanalyse und psychotherapeutischer Prozeß,
in: Petermann, F. (Hrsg.) Methodische Grundlagen klinischer Psychologie, 169 - 192,
Weinheim: Beltz, 1977
- Dahme, B.: Statistische Analyse kurzer Zeitreihen in der klinischen Effekt-Prüfung,
in: Petermann, F.; Hehl, F.J. (Hrsg.) Fortschritte in der klinischen Psychologie, B 18, 251 - 265,
München, Wien, Baltimore: Urban & Schwarzenberg, 1979
- David, H.T.; Kruskal, W.H.: The WAGR sequential t-test reaches a decision with probability one,
Ann. Math. Statist., 1956, 27, 797 - 805
- Davies, N.; Newbold, P.: Some power studies of a portemanteau test of time series model specification,
Biometrika, 1979, 66, 1, 153 - 155
- Davies, N.; Triggs, C.M.; Newbold, P.: Significance levels of the Box-Pierce portemanteau statistic in finite samples,
Biometrika, 1977, 64, 3, 517 - 522
- De Groot, M.H.: Probability and Statistics,
Massachusetts: Addison-Wesley Publishing Company, 1975
- Dent, W.: Computation of the exact likelihood function of an ARIMA process,
Journal of Statistical Computation and Simulation, 1977, 5, 193 - 206
- D'Escopo, D.A.: A Note of Forecasting by the Exponential Smoothing Operator,
Operations Research, 1961, Vol. 9, No. 5, 667 - 686

- Deutsche Bundesbank (Hrsg.): Experience in the Application of Regression Computing to the seasonal Adjustment of Statistical Time Series,
Monthly Reports, August 1961
- Dhrymes, P.J.: Introductory Econometrics,
Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag, 1978
- Dixon, W.J.: BMDP statistical software,
Berkeley: University of California Press, 1983
- Draper, N.R.; Smith, H.: Applied Regression Analysis,
New York: John Wiley & Sons, 1966
- Durbin, J.: Estimation of Parameters in Time-Series Regression Models,
Journal of the Royal Statistical Society, 1960, B, 22,
139 - 153
- Fisz, M.: Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematische Statistik,
Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1978
- Flechtheim, U.: Futurologie,
Köln: 1970
- Foot, R.; Fox, K.: Seasonal Variation; Methods of Measurement and Test of Significance,
Agriculture Handbook, September 1952
- Friedrichs, J.: Methoden empirischer Sozialforschung,
Reinbeck: Rohwolt, 1977
- Geurts, M.D.; Ibrahim, I.B.: Comparing the Box-Jenkins Approach with the Exponentially Smoothed Forecasting Model Application to Hawaii Tourists,
Journal of Marketing Research, Vol. XII (May 1975),
182 - 188
- Ghosh, B.K.: Sequential Tests of Statistical Hypotheses,
Massachusetts: Addison-Wesley, Reading, 1970
- Gilchrist, W.: Statistical Forecasting,
London: 1976

- Gisholt, O.: Marketing-Prognosen unter besonderer Berücksichtigung intersubjektiver Befragungsmethoden, Dissertation, St. Gallen, 1976
- Glass, G.V.; Willson, V.L.; Gottman, J.M.: Design and Analysis of Time-Series Experiments, Boulder, Colorado: Colorado Associated University Press, 1975
- Göricke, G.: Wirkungsanalyse absatzpolitischer Maßnahmen mit Hilfe des Kalman-Filters, Unveröffentlichte Dissertation, Oldenburg, 1986
- Gottman, J.M.: Time-series analysis, Cambridge: Cambridge University Press, 1981
- Govindarajulu, Z.: Sequential Statistical Procedures, New York, San Francisco, London: Academic Press, 1975
- Granger, C.W.J.; Newbold, P.: Forecasting Economic Time Series, New York, San Francisco, London: Academic Press, 1977
- Graupe, D.; Krause, D.J.; Moore, J.B.: Identification of Autoregressive Moving-Average Parameters of Time-Series, IEEE Transactions on Automatic Control, February 1975, 104 - 107
- Green, P.E.; Tull, D.S.: Methoden und Techniken der Marketingforschung, Stuttgart: C.E. Poeschel Verlag, 1982
- Groff, G.K.: Empirical Comparison of Models for Short-Range Forecasting, Management Science, 1973, Vol. 20, No. 1, 22 - 31
- Hannan, E.J.; Rissanen, J.: Recursive estimation of mixed autoregressive-moving average order, Biometrika, 1982, 69, 1, 81 - 94
- Hanssens, D.M.: Bivariate time-series analysis of the relationship between advertising and sales, Applied Econometrics, 1980, Vol. 12, Number 3, September, 329 - 339

- Harrison, P.J.: Exponential Smoothing and Short-Term Sales Forecasting,
Management Science, 1967, Vol. 13, No. 11, 821 - 842
- Hays, W.L.: Statistics for the social sciences,
London: Holt, Rinehart and Winston, 1974
- Heinzelbecker, K.: Marketing-Informationssysteme,
Stuttgart: Kohlhammer, 1985
- Hellmer, R.M.; Johansson, J.K.: An exposition of the Box-Jenkins transfer function analysis with an application to the advertising-sales relationship,
Journal of Marketing Research, 1977, Vol. XIV, 227 - 239
- Hempel, C.G.; Oppenheim, P.: Studies in the Logic of Explanation,
in: Hempel, C.G. (Hrsg.) Aspects of Scientific Explanation and Other Essays in the Philosophy of Science,
New York, London: 1965
- Hibbs, D.A.: On analysing the effects of policy interventions: Box-Jenkins and Box-Tiao vs. structural equation models,
in: Heise, D.R. (Hrsg.) Sociological Methodology 1977,
San Francisco: Jossey-Bass, 1977
- Holt, C.C.; Modigliani, F.; Muth, J.F.; Simon, H.A.: Planning Production Inventories and Work Force,
Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1960
- Hruschka, H.: Kurzfristprognose ökonomischer Zeitreihen : Ein empirischer Leistungsvergleich alternativer Verfahren,
Frankfurt am Main: Deutsch, 1980
- Hüttner, M.: Markt- und Absatzprognosen,
Stuttgart: Kohlhammer, 1982
- Jenkins, G.M.: Practical Experiences with Modelling and Forecasting Time Series,
Jersey, Channel Islands: AGJP Publication, 1979
- Johnston, J.: Econometric Methods,
Tokio: Mc Graw-Hill, 1972

- Keeser, W.: Zeitreihenanalyse in der klinischen Psychologie. Ein empirischer Beitrag zur Box-Jenkins Methodologie, Unveröffentlichte Dissertation, München, 1979
- Kemp, K.W.: Formulae for calculating the operating characteristic and the average sample number of some sequential tests, Journal of the Royal Statistical Society, 1958, B, 20, 379 - 386
- Kendall, M.G.: Time-Series, London: Charles Griffin & Company, 1973
- Kiefer, J.; Weiss, L.: Some properties of generalized sequential probability ratio tests, Ann. Math. Statist., 1957, 28, 57 - 74
- Kilger, W.: Optimale Produktions- und Absatzplanung, Köln, Opladen: 1973
- Klein, L.R.: A Textbook of Econometrics, Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1974
- Krebs, V.: Nichtlineare Filterung, München, Wien: Oldenbourg Verlag, 1980
- Kroeber-Riel, W.: Konsumentenverhalten, München: Verlag Vahlen, 1975
- Laster, S.J.: Adaptive Processing of Seismic Data, in: Findley, D.F. (Ed.) Applied Time Series Analysis, New York, San Francisco, London: Academic Press, 1978, 225 - 244
- Lewandowski, R.: Prognose- und Informationssysteme und ihre Anwendungen, Band 1, Berlin, New York: De Gruyter, 1974
- Lewandowski, R.: Prognose- und Informationssysteme und ihre Anwendungen, Band 2: Mittelfristige Prognose- und Marketing-Systeme, Berlin, New York: De Gruyter, 1980
- Lienert, G.A.: Verteilungsfreie Methoden in der Biostatistik, Band II, Meisenheim: Verlag Anton Hain, 1978

- Little, J.D.C.: Models and Managers: The Concept of a Decision Calculus,
Management Science, 1970, 466ff
- Ljung, G.M.; Box, G.E.P.: On a measure of lack of fit in time series models,
Biometrika, 1978, 65, 297 - 303
- Maibaum, G.: Wahrscheinlichkeitstheorie und mathematische Statistik,
Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1976
- Makridakis, S.; Reschke, H.; Wheelwright, S.C.: Prognosetechniken für Manager,
Wiesbaden: Gabler-Verlag, 1980
- Makridakis, S.; Wheelwright, S.C.: Forecasting/Methods and Applications,
New York: John Wiley & Sons, 1978a
- Makridakis, S.; Wheelwright, S.C.: Interactive Forecasting,
San Francisco: Holden-Day, 1978b
- Malý, V.: Sequenzprobleme mit mehreren Entscheidungen und Sequenzschätzung,
Biometrische Zeitschrift, 1960, 2, 45 - 64;
1961, 3, 149 - 177; 1963, 5, 24 - 31
- Mann, H.B.; Wald, A.: On the statistical treatment of linear stochastic difference equations,
Econometrica, 1943, 11, 173 - 220
- McCleary, R.; Hay, R.A.: Applied time-series analysis for the social sciences,
Beverly Hills: Sage, 1980
- Meffert, H.: Marketing,
Wiesbaden: 1980
- Meffert, H.; Steffenhagen, H.: Marketing-Prognosemodelle,
Stuttgart: C.E. Poeschel Verlag, 1977

- Möbus, C.; Göricke, G.; Kröh, P.A.: Parametrische und nichtparametrische Methoden der Einzelfallstatistik,
in: Appelt, H.; Strauß, B. (Hrsg.) Ergebnisse einzel-
fallstatistischer Untersuchungen in Psychosomatik und
klinischer Psychologie, 170 - 188,
Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag, 1985
- Möbus, C.; Nagl, W.: Messung, Analyse und Prognose von Verän-
derungen,
in: Bredenkamp, J.; Feger, H. (Hrsg.) Hypothesenprüfung,
Band 5 der Serie Forschungsmethoden der Psychologie der
Enzyklopädie der Psychologie, 239 - 470,
Göttingen: Verlag für Psychologie, 1983
- Moles, A.; Caude, M.: Créativité et méthodes d'innovation,
Paris: 1970
- Muth, J.F.: Optimal Properties of Exponentially Weighted Fore-
casts,
Journal of the American Statistical Association,
1960, Vol. 55, No. 290, 299 - 306
- Nelson, C.R.: Applied Time Series Analysis,
San Francisco: Holden-Day, 1973
- Nenning, M.; Topritzhofner, E.; Wagner, U.: Zur Kompatibilität
alternativer kommerziell verfügbarer Datenquellen für
die Marktreaktionsmodellierung: Die Verwendung von
Prewhitening-Filtern und Kreuzspektralanalyse sowie
ihrer Konsequenzen für die Analyse betriebswirtschaft-
licher Daten,
in: Nenning, M.; Topritzhofner, E.; Wagner, U. (Hrsg.)
Empirische Marktmodellierung, 11 - 30,
Würzburg, Wien: Physica, 1981
- Newbold, P.: The exact likelihood function for a mixed autore-
gressive-moving average process,
Biometrika, 1974, 61, 3, 423 - 426
- Neyman, J.; Pearson, E.S.: On the use and interpretation of
certain test criteria for purposes of statistical
inference,
Biometrika, 1928, 20A, Teil I: 175 - 240,
Teil II: 263 - 294

- Noether, G.E.: Two sequentiell tests against trend,
Journal of the American Statistical Association,
1956, 51, 440 - 450
- Opp, K.D.: Methodologie der Sozialwissenschaften,
Reinbeck: Rohwolt, 1970
- Ostrom, C.W. Jr.: Time Series Analysis Regression Techniques,
Beverly Hills, London: Sage Publications, 1978
- Parsons, L.J.; Schultz, R.L.: Marketing Models and Econometric
Research,
New York: North Holland, 1978
- Revenstorf, D.: Zeitreihenanalyse für klinische Daten,
Weinheim, Basel: Beltz-Verlag, 1979
- Revenstorf, D.; Keeser, W.: Zeitreihenanalyse von Therapiever-
läufen - ein Überblick,
in: Petermann, F.; Hehl, F.J. (Hrsg.) Fortschritte in
der klinischen Psychologie, B 18, 183 - 228,
München, Wien, Baltimore: Urban & Schwarzenberg, 1979
- Rinne, H.: Ökonometrie,
Stuttgart: Kohlhammer, 1976
- Rosentreter, J.: Prognosen in der industriellen Planung: eine
Analyse von Prognoseverfahren und Anwendungsproblemen
unter besonderer Berücksichtigung von Verfahren auf
der Basis der exponentiellen Glättung,
Zürich, Frankfurt am Main: Verlag H. Deutsch, 1977
- Rothschild, K.W.: Wirtschaftsprognose,
Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag, 1969
- Sachs, L.: Angewandte Statistik,
Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag, 1978
- Saval, G.A.: Rationale Absatzplanung,
Wiesbaden: 1972
- Schneeweiß, H.: Ökonometrie,
Würzburg, Wien: Physica, 1978

- Schwarze, J.: Probleme der Fehlermessung bei quantitativen ökonomischen Prognosen,
Zeitschrift für die gesamte Staatswissenschaft, 1973,
129. Band, 535 - 558
- Shiskin, J.: The Use of electronic Computers for the Analysis of seasonal Fluctuations,
Bulletin de l'Institut International de Statistique,
Tome XXXV, 1957, 71ff
- Shiskin, J.; Eisenpress, H.: Seasonal Adjustments by electronic Computer Methods,
New York: National Bureau of Economic Research, 1958
- Skarabis, H.; Schlittgen, R.; Buseke, K.H.; Apostolopoulos, N.: Sequentializing nonparametric tests,
in: Skarabis, H.; Sint, P.P. (Eds.) Compstat Lectures 1,
57 - 93,
Würzburg, Wien: Physica, 1978
- Spriet, J.A.; Vansteenkiste, G.C.: Computer-aided modelling and simulation,
London, New York, San Francisco: Academic Press, 1982
- Starr, N.: The performance of a sequential procedure for the fixed-width intervall estimation of the mean,
Ann. Math. Statist., 1966, 37, 36 - 50
- Strauß, B.; Stemmler, G.: Praktische Probleme bei der Anwendung von Zeitreihenanalysen,
in: Appelt, H.; Strauß, B. (Hrsg.) Ergebnisse einzel-fallstatistischer Untersuchungen in Psychosomatik und klinischer Psychologie, 139 - 153,
Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag, 1985
- Streeten, P.: Programme und Prognosen,
in: Gäfgen, G. (Hrsg.) Grundlagen der Wirtschaftspolitik,
Köln, Berlin: 1967
- Strigel, W.H.: Problems and Instruments of Business Cycle Analysis,
Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag, 1978

- Theil, H.: Economic Forecasts and Policy,
Amsterdam: North Holland, 1970
- Theil, H.: Principles of Econometrics,
New York: John Wiley & Sons, 1971a
- Theil, H.: Applied Economic Forecasts,
Amsterdam: North Holland, 1971b
- Theuerkauf, L.: Sequentielle Schätzverfahren,
Dissertation, Heft 11 der Studien zur angewandten
Wirtschaftsforschung und Statistik der Universität
Hamburg,
Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht, 1981
- Tiao, G.C.; Box, G.E.P.: Modelling Multiple Time Series With
Applications,
Journal of the American Statistical Association,
1981, 76, 802 - 816
- Tiao, G.C.; Tsay, R.S.: Consistency Properties of Least Squares
Estimates of Autoregressive Parameters in ARMA Models,
The Annals of Statistics, 1983, Vol. 11, No. 3, 856 - 871
- Tintner, G.D.; Rao, I.N.K.: On the variate difference method,
Australian Journal of Statistics, 1963, 5, 106 - 116
- Tsay, R.S.: Regression Models With Time Series Errors,
Journal of the American Statistical Association,
1984, 79, 118 - 124
- Tsay, R.S.; Tiao, G.C.: Consistent Estimates of Autoregressive
Parameters and Extended Sample Autocorrelation Function
for Stationary and Nonstationary ARMA Models,
Journal of the American Statistical Association,
1984, 79, 84 - 96
- Wald, A.: Sequential Analysis,
New York: Dover Publications, 1947
- Weber, E.: Grundriß der biologischen Statistik,
Jena, Stuttgart, New York: Gustav Fischer Verlag, 1980

- Weber, K.: Prognose und Prognoseverfahren,
in: Grochla, E.; Wittmann, C.E. (Hrsg.) Handwörterbuch
der Betriebswirtschaft, 3188 - 3203,
Stuttgart: C.E. Poeschel Verlag, 1975
- Weiss, L.: Testing one simple hypothesis against another,
Ann. Math. Statist., 1953, 24, 273 - 281
- Wetherill, G.B.: Sequential Methods in Statistics,
New York: John Wiley & Sons, 1975
- Wheelwright, S.C.; Clarke, D.G.: Corporate Forecasting:
Promise and Reality,
Harvard Business Review, November - December 1976
- Widrow, B.: Adaptive Filters I: Fundamentals,
Stanford University Technical Report, 1966, No. 6764-6.
Systems Theory Laboratory
- Wilcoxon, F.; Rhodes, L.J.; Bradley, R.A.: Two sequential two-
sample grouped rank tests with application to
screening experiments,
Biometrics, 1963, 19, 58 - 84
- Winters, P.R.: Forecasting Sales by Exponentially Weighted
Moving Averages,
Management Science, 1960, Vol. 6, 324 - 342
- Wöller, R.: Absatzprognosen,
Obertshausen: verlag für wirtschafts- und kartographie-
publikationen, 1980
- Wohlzogen, F.X.; Wohlzogen-Bukovics, E.: Sequentielle Parameter-
schätzung bei biologischen Alles-oder-Nichts-Reaktionen,
Biometrische Zeitschrift, 1966, 8, 84 - 120
- Wonnacott, R.J.; Wonnacott, T.H.: Econometrics,
New York: John Wiley & Sons, 1979
- Woodward, W.A.; Gray, H.L.: On The Relationship Between the S
Array and the Box-Jenkins Method of ARMA Model Iden-
tification,
Journal of the American Statistical Association,
1981, 76, 579 - 587

Yaglom, A.M.: The correlation theory of processes whose n -th difference constitute a stationary process,
Matem. Sb., 1955, 37 (79), 141ff

Yahav, J.A.; Bickel, P.J.: Asymptotically optimal Bayes and minimax procedures in sequential estimation,
Ann. Math. Statist., 1968, 39, 442 - 456

Yamane, T.: Statistik Bd. I, II,
Frankfurt am Main: Fischer Taschenbuch Verlag, 1976

Lebenslauf

Ich bin deutscher Staatsangehöriger und wurde am 19.03.1955 in Sanderbusch bei Wilhelmshaven geboren.

Ostern 1962 wurde ich in Wilhelmshaven eingeschult. Ab Sommer 1962 bis 1966 besuchte ich die Grundschule in Hude und absolvierte dort auch noch die 5. und 6. Klasse in der Förderstufe (Kurzschuljahre). Im August 1967 ging ich dann in die 7. Klasse des Max-Planck-Gymnasiums in Delmenhorst über. Im August 1969 wechselte ich in die 8. Klasse der Realschule an der Holbeinstraße in Delmenhorst, wo ich im Juli 1972 die Mittlere Reife erlangte. Im August 1972 trat ich in die 11. Klasse des Gymnasiums der Aufbauform, wirtschaftswissenschaftlicher Typ, in Delmenhorst ein und legte dort im Mai 1975 die Reifeprüfung ab.

Im Oktober 1975 nahm ich an der Universität Oldenburg das Studium im Studiengang Mathematik mit dem Nebenfach Ökonomie auf. Im Februar 1978 legte ich dort die Diplom-Vorprüfung ab und bestand im Juni 1981 die Diplom-Hauptprüfung mit "gut". Im Studiengang Ökonomie der Universität Oldenburg nahm ich im WS 1981/82 das Promotionsstudium auf und begann im WS 1982/83 ein Zweitstudium im Studienfach Wirtschaftswissenschaften im 4. Fachsemester. Im Juni 1983 erhielt ich die Zulassung als Doktorand und legte im Oktober 1983 im Studiengang Ökonomie die Diplom-Vorprüfung ab.

